



Quelques aspects géométriques et dynamiques du mapping class group

Jérôme Fehrenbach

► To cite this version:

Jérôme Fehrenbach. Quelques aspects géométriques et dynamiques du mapping class group. Mathématiques [math]. Université Nice Sophia Antipolis, 1998. Français. NNT: . tel-00124712

HAL Id: tel-00124712

<https://theses.hal.science/tel-00124712>

Submitted on 15 Jan 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

QUELQUES ASPECTS GÉOMÉTRIQUES ET DYNAMIQUES DU MAPPING CLASS GROUP

THÈSE

présentée en vue d'obtenir le grade de

Docteur en Mathématiques
de
l'Université de Nice Sophia-Antipolis

par

Jérôme Fehrenbach

Soutenue le 8 janvier 1998 à 10h30 à l'INLN
devant le jury composé de Mme et MM.

J. Birman

M. Boileau

J-M. Gambaudo

P. Lochak

J. Los

M. Lustig

M. Merle

Rapporteur

Examineur

Examineur

Examineur

Directeur

Rapporteur

Président

Remerciements

Je voudrais exprimer ma gratitude à Gérard Iooss et Pierre Coullet, directeurs successifs de l'INLN, qui ont bien voulu m'accueillir au sein de cet institut. Le personnel administratif de l'INLN et du laboratoire J.A.Dieudonné a permis le déroulement de ma thèse dans de bonnes conditions matérielles, aussi bien pour les missions que pour les besoins en ouvrages, articles, fournitures diverses, et je tiens à le remercier pour cela.

Jérôme Los m'a initié à la recherche en mathématiques, il m'a fait découvrir une manière de faire de la dynamique qui s'est avérée riche en résultats. Il m'a consacré ses temps sans compter, m'a remonté le moral lors de nombreux épisodes de découragement. Pour tout ce qu'il a fait, et pour avoir dirigé cette thèse, je tiens à le remercier vivement.

Je suis également très reconnaissant à MM. Michel Boileau, Jean-Marc Gambaudo, Pierre Lochak et Michel Merle, membres du jury, d'avoir accepté d'évaluer cette thèse, et plus spécialement à Mme Joan Birman et M. Martin Lustig d'avoir accepté d'en être les rapporteurs.

Je voudrais également remercier toutes les personnes avec qui j'ai eu le plaisir de faire des mathématiques pendant ces quelques années, notamment Marc Becker, Christian Bonatti, Arnaud Dehove, Jean-Nicolas Denarié, Adrien Douady, François Gautero, Peter Haisinsky, Bill Harvey, Boris Kolev, William Menasco, Marie-Christine Pérouème, Dieter Schleicher, Vlad Sergiescu.

Enfin je souhaite remercier toutes les personnes qui ont rendu ces trois années de thèse aussi agréables que possible, pour leur entrain et leur soutien pendant quelques mauvaises passes ; que toutes ces personnes, qui se reconnaîtront, soient assurées de mon amitié sincère et reconnaissante.

Table des matières

Introduction	7
1 La théorie des représentants efficaces	13
1.1 Théorème de classification de Nielsen-Thurston	14
1.2 Représentants topologiques	15
1.3 Représentants efficaces d'un homéomorphisme pseudo-Anosov	18
1.4 Les mots transverses sont bien définis	19
1.5 Réseaux ferroviaires, feuilletages, représentant pseudo-Anosov de $[f]$	23
2 Racines des homéomorphismes pseudo-Anosov	29
Introduction	29
2.1 Generalities	32
2.1.1 Representatives	32
2.1.2 Embedded representatives	35
2.1.3 Invariant train tracks	36
2.2 Rectangle surfaces	37
2.2.1 Construction of the surface $\mathcal{R}^{[T]}$	37
2.2.2 Definition of the map f_T	39
2.2.3 Dynamics of f_T	40
2.2.4 Good representatives	42
2.2.5 Characterization of admissible lengths	43
2.2.6 Uniqueness lemma	46
2.3 Operations	46
2.3.1 Foldings	46
2.3.2 Glueings	48
2.3.3 Unglueing	49
2.4 Super efficient representatives	50
2.4.1 Super efficient representatives.	50
2.4.2 Operations on the set of super efficient representatives	52
2.4.3 Technical results	54
2.4.4 Main result	55
2.5 Roots and symmetries	56
2.5.1 Transition maps	56

2.5.2	Solving for roots	58
2.5.3	Symmetries of pseudo-Anosov homeomorphisms	61
2.6	Practical determination	61
2.7	The conjugacy problem, connectedness of the set of efficient representatives.	63
2.8	Examples	65
2.8.1	Cycle for a pseudo-Anosov braid	65
2.8.2	Root of a pseudo-Anosov homeomorphism	67
2.8.3	A pseudo-Anosov homeomorphism admitting a symmetry	70
3	Une minoration de l'entropie topologique des difféomorphismes du disque	73
	Introduction	73
3.1	Propriétés de l'entropie topologique	75
3.2	Graphes-squelettes	76
3.3	Démonstration du théorème 3.0.2	78
3.4	Démonstration du théorème 3.0.1 à partir du théorème 3.0.2	84
4	Critères topologiques pour les tresses admettant des déstabilisations et des mouvements d'échange	87
	Introduction	87
4.1	Braids and homeomorphisms	89
4.2	Geometrical results	92
4.3	A topological criterion for destabilization	94
4.4	A topological criterion for exchange	97
	Bibliographie	99

Introduction

Nous considérons une surface \bar{S} compacte orientée et X un sous-ensemble fini de \bar{S} qui est l'ensemble des *points marqués*. La surface S à points marqués est (\bar{S}, X) . Un homéomorphisme de S est un homéomorphisme de \bar{S} qui préserve globalement l'ensemble des points marqués. L'ensemble des homéomorphismes de S qui préservent l'orientation est un groupe noté $\text{Homéo}^+(S)$, l'ensemble des homéomorphismes de S isotopes à l'identité forme un sous-groupe distingué de $\text{Homéo}^+(S)$ noté $\text{Homéo}^0(S)$. Le groupe quotient $\text{Homéo}^+(S)/\text{Homéo}^0(S)$ est appelé le *mapping class group* de S , il est noté $\text{MCG}(S)$. Un élément du mapping class group est donc une classe d'isotopie d'homéomorphismes. Lorsque la surface possède des composantes de bord, nous prenons la convention de permettre une isotopie libre sur le bord.

L'étude des homéomorphismes à isotopie près a commencé avec Nielsen [Ni]. Si $f \in \text{Homéo}^+(S)$ est tel que f^k est isotope à l'identité alors il existe g isotope à f tel que $g^k = \text{id}$. Autrement dit, si une classe d'isotopie est d'ordre fini dans $\text{MCG}(S)$ alors elle possède un représentant qui est d'ordre fini dans $\text{Homéo}^+(S)$. On pourra se reporter à [Ker] pour des résultats plus généraux. La classification des éléments du mapping class group a été achevée par Thurston [Th] dans le cas où la surface a une caractéristique d'Euler négative, les autres cas étant plus simples. Il a donné un modèle d'homéomorphismes appelés *pseudo-Anosov* qui fixent (globalement) une paire de feuilletages mesurés transverses, dilatant l'un et contractant l'autre d'un même facteur λ appelé *facteur de dilatation*, cf section 1.1. Il a montré que chaque classe d'isotopie d'homéomorphismes contient un représentant simple, à savoir soit d'ordre fini, soit pseudo-Anosov, soit *réductible* c'est-à-dire laissant invariante une collection essentielle de courbes fermées simples. Si un homéomorphisme est réductible, on peut découper la surface S le long des courbes invariantes et étudier les applications de premier retour sur chaque composante connexe. On peut leur appliquer à nouveau le théorème de classification. Une autre façon d'énoncer le théorème de classification est la suivante : étant donné un homéomorphisme de S , on peut le déformer par isotopie en un homéomorphisme simple, c'est-à-dire de l'un des modèles ci-dessus. On dira par extension qu'une *classe d'isotopie* est pseudo-Anosov, d'ordre fini ou réductible si un de ses représentants l'est.

Un *réseau ferroviaire* dans une surface S à points marqués est un graphe τ plongé dans S tel que en chaque sommet du graphe on peut définir un espace tangent. La situation au voisinage des sommets ressemble alors à un aiguillage, cf figure 0.1a, ce qui justifie le nom. On suppose de plus que les composantes connexes du complémentaire du graphe τ sont des disques topologiques avec au moins trois tangences sur le bord ou des disques avec un point marqué et au moins une tangence sur le bord. Thurston a remarqué qu'un objet intéressant pour étudier un homéomorphisme pseudo-Anosov f était la donnée d'un

réseau ferroviaire τ adapté à f : on dit que τ est adapté à f s'il existe un voisinage régulier $N(\tau)$ du graphe τ , fibré par des *traverses* comme sur la figure 0.1b tel que un graphe τ' isotope à $f(\tau)$ est inclus dans $N(\tau)$, plongé de façon transverse aux traverses. Les réseaux ferroviaires ont fait l'objet de beaucoup d'études, citons par exemple le livre de Penner [Pe1]. La donnée d'un réseau ferroviaire τ adapté à f permet de retrouver la paire de feuilletages invariants et de calculer le facteur de dilatation λ . Il permet aussi d'étudier la dynamique de f .

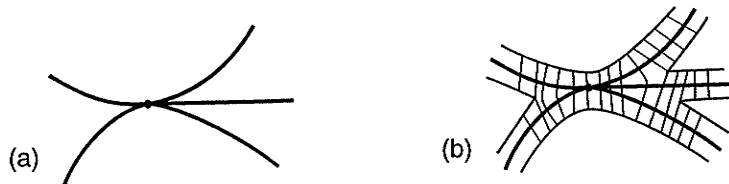


Figure 0.1: Aiguillage (a) ; voisinage fibré du réseau ferroviaire (b).

Un objet portant la même information qu'un réseau ferroviaire adapté à f , appelé *représentant efficace de f* ou encore *représentant efficace de $[f]$* est décrit dans [BH1], [Lo1], [FM]. Les représentants efficaces sont combinatoirement plus simples que les réseaux ferroviaires. Ce sont des objets que nous utilisons dans les chapitres 2 et 3 de ce travail après un exposé succinct de la théorie dans le chapitre 1. La théorie des représentants efficaces permet de résoudre le problème de conjugaison entre éléments pseudo-Anosov du mapping class group. Une propriété importante est que l'ensemble (fini) des représentants efficaces d'une classe d'isotopie pseudo-Anosov est un invariant de conjugaison [Lo2] : si $[g]$ est conjuguée à $[f]$, alors les représentants efficaces de $[g]$ ont la même combinatoire que ceux de $[f]$, seuls les plongements des graphes diffèrent. Notons que d'autres invariants de conjugaison ont été donnés par Hemion [He] et Mosher [Mo]. Dans le cas où $[f]$ est d'ordre fini, des invariants de conjugaison ont été donnés par Nielsen [Ni]. Dans le cas où $[f]$ est réductible et C est une collection maximale de courbes de réduction, Keil [Ke] a donné des invariants de conjugaison de $[f]$ calculables explicitement, qui dépendent à la fois des applications de premier retour de type pseudo-Anosov ou ordre fini sur les composantes de $S - C$, et des recollements effectués entre ces composantes.

Nous considérons dans le chapitre 2 le cas particulier d'un homéomorphisme pseudo-Anosov f qui fixe un point marqué x_0 . Nous définissons alors des objets associés à $[f]$ appelés *représentants super efficaces de $[f]$* , qui sont des représentants efficaces particuliers. Leur ensemble constitue aussi un invariant de conjugaison, il est plus petit que l'ensemble des représentants efficaces. Nous donnons un algorithme fini permettant de calculer l'ensemble des représentants super efficaces de $[f]$. L'étude de la structure de l'ensemble des représentants super efficaces permet en outre de répondre à la *question des racines* : est-ce qu'il existe un homéomorphisme g de S qui fixe x_0 tel que $f = g^k$? Cette question est équivalente à la question : existe-t-il $[g] \in MCG(S)$ fixant x_0 telle que $[f] = [g]^k$. En effet, si $[f]$ admet une racine $[g]$ fixant x_0 dans $MCG(S)$, cette racine est une classe d'isotopie pseudo-Anosov. Si g_1 est un représentant pseudo-Anosov de $[g]$, alors $g_1^k = f_1$ est un représentant pseudo-Anosov de $[f]$. On sait alors (cf [FLP]) que $f = hf_1h^{-1}$, où h est isotope à l'identité. En posant $g = hg_1h^{-1}$, on obtient une racine

de f dans $\text{Homéo}^+(S)$. Nous pouvons également répondre à la *question des symétries* : existe-t-il un homéomorphisme g d'ordre fini qui fixe x_0 tel que $fg = gf$? Nous appelons un tel homéomorphisme g une *symétrie* de f . Nous montrons le

Théorème 2.0.1, Chapitre 2

Soit S une surface munie de $n + 1$ points marqués $\{x_0, \dots, x_n\}$. Soit $[f] \in \text{MCG}(S)$ une classe d'isotopie pseudo-Anosov laissant fixe le point marqué x_0 .

Il existe un algorithme fini qui permet de décider si $[f]$ admet une racine qui fixe x_0 , et le cas échéant de calculer cette racine.

Il existe un algorithme fini qui permet de décider si $[f]$ commute avec un homéomorphisme d'ordre fini qui fixe x_0 , et le cas échéant de le calculer explicitement.

Nous avons illustré cet algorithme par quelques exemples. Notons qu'un résultat analogue dans le cas particulier du disque a été donné par Styšnev [St]. En utilisant une méthode inspirée de l'algorithme de Garside [Ga], Styšnev montre que, étant donnés une tresse α et un entier m , on peut décider par un algorithme fini s'il existe une tresse β telle que $\alpha = \beta^m$. Les éléments du mapping class group du disque à n points marqués sont des classes de tresses à n brins modulo le centre Z_n du groupe de tresses, ce qui fait le lien entre [St] et le travail présenté ici. Notre résultat permet de trouver immédiatement si un homéomorphisme pseudo-Anosov est une puissance ou non, nous n'avons pas besoin d'essayer tous les entiers m .

Un invariant de conjugaison d'une application continue T d'un espace compact métrique X dans lui-même est l'*entropie topologique*, introduite par Adler, Konheim et McAndrew [AKM]. C'est un réel positif ou nul, noté $h(T)$, mesurant asymptotiquement le mélange induit sur X par application des itérés de T . Si f est un homéomorphisme pseudo-Anosov d'une surface S , son entropie topologique $h(f)$ est égale au logarithme de son facteur de dilatation [FLP]. De plus l'entropie de f est minimale dans sa classe d'isotopie. On sait par ailleurs que le facteur de dilatation est égal au rayon spectral de la *matrice d'incidence* d'un représentant efficace de f , cf [BH1], [Lo1]. Cette quantité est *a priori* facile à calculer. Nous avons mis ceci en œuvre au chapitre 3, dans le cas particulier où la surface S est le disque D^2 muni d'un certain nombre (≥ 3) de points marqués. Des considérations combinatoires sur les représentants efficaces permettent d'obtenir une minoration de l'entropie topologique des homéomorphismes pseudo-Anosov du disque à n points marqués qui permutent transitivement les points marqués. Dans le cas général où f n'est plus supposée être pseudo-Anosov, nous montrons le

Théorème 3.1.2, Chapitre 3

Soit $f \in \text{Homéo}^+(D^2)$ ayant une orbite périodique \mathcal{O} de période $n \geq 3$. Nous choisissons les points de \mathcal{O} comme points marqués du disque. Si aucun représentant de la classe d'isotopie de f par rapport à \mathcal{O} n'est d'entropie nulle, alors

$$h(f) \geq \frac{1}{n} \ln(1 + \sqrt{2}).$$

Ce résultat améliore un peu les minoration obtenues par d'autres auteurs [Lo4], [FM] qui étaient $\frac{1}{n} \ln 2$. Pour étudier l'entropie des homéomorphismes du disque, nous nous ramenons à calculer l'entropie d'applications transitives sur les arbres qui sont d'une forme

particulière. La minoration par $\frac{1}{n} \ln 2$ est par contre la meilleure minoration possible pour les applications transitives sur les arbres [ABLM]. La condition supplémentaire essentielle pour les applications sur les arbres issues d'homéomorphismes est que l'arbre et son image sont plongés dans le disque.

Un objet étroitement lié au mapping class group est le groupe de tresses. Dans le cas où la surface est le disque à n points marqués, il existe un morphisme de groupes Φ entre le groupe des tresses à n brins B_n et le mapping class group du disque D_n (cf [Bi]). Le noyau de Φ est le centre Z_n de B_n , qui est un groupe cyclique. On dit qu'une tresse β induit l'élément $\Phi(\beta)$ du mapping class group.

Etant donnée une tresse β à n brins, on lui associe sa *fermeture* $K(\beta)$ qui est en général un *entrelacs* de S^3 , ou un *nœud* de S^3 si la tresse est transitive, cf [Al]. On peut alors étudier un nœud en s'intéressant aux tresses dont il est la fermeture. Un nœud donné K est la fermeture d'une infinité de tresses, cette infinité a été décrite pour la première fois par Markov [Ma]. Il définit une transformation appelée *stabilisation* qui transforme une tresse à n brins en une tresse à $n+1$ brins ayant la même fermeture, l'opération réciproque s'appelle *déstabilisation*, on remarque qu'elle ne peut s'appliquer que si la tresse est d'une forme particulière. Si deux tresses ont même fermeture, alors il existe une suite finie de conjugaisons, stabilisations et déstabilisations qui transforme l'une en l'autre (cf aussi [Bi]). Cependant, cette suite finie n'est pas toujours calculable explicitement, par exemple il n'y a pas de borne *a priori* sur le nombre d'opérations à effectuer. Birman et Menasco [BM] ont démontré un résultat plus fin. Ils définissent une opération appelée *mouvement d'échange*, qui transforme une tresse à n brins en une autre tresse à n brins ayant même fermeture ; le mouvement d'échange ne peut s'appliquer que si la tresse est d'une forme particulière. Ils démontrent que si la fermeture d'une tresse β est l'entrelacs trivial à r composantes, il existe une suite finie de conjugaisons, déstabilisations et mouvements d'échange qui transforme β en la tresse triviale à r brins. En particulier, le nombre de brins n'augmente jamais au cours de cette suite d'opérations.

On voudrait pouvoir décider si une tresse donnée admet, à conjugaison près, une déstabilisation ou un mouvement d'échange. Nous répondons partiellement à ces questions en fournissant des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une tresse donnée admette une déstabilisation, ou un mouvement d'échange, à conjugaison près et à un élément du centre près. Ce sont des conditions sur l'élément du mapping class group induit par la tresse, ce qui explique pourquoi elles ne distinguent pas deux tresses qui diffèrent par un élément du centre. Plus précisément nous montrons :

Théorème 4.0.1 (Critère de déstabilisation, Chapitre 4) : La tresse β admet une déstabilisation modulo Z_n si et seulement s'il existe un homéomorphisme f dans la classe d'isotopie induite par β et un arc γ allant de l'un des points marqués au bord du disque tel que $f(\gamma)$ est disjoint de γ .

Théorème 4.0.2 (Critère d'échange, Chapitre 4) : La tresse β admet un mouvement d'échange modulo Z_n si et seulement s'il existe un homéomorphisme f dans la classe d'isotopie induite par β et deux arcs disjoints γ_1 et γ_2 allant de deux points marqués distincts au bord du disque tels que $f(\gamma_1)$ et γ_2 sont disjoints.

Dans un premier chapitre, nous exposons succinctement la théorie des représentants

efficaces dans le but de démontrer deux résultats techniques qui n'apparaissaient pas démontrés de manière précise dans la littérature existante. Il n'y a pas de surprise ni de nouveauté dans ces démonstrations, il s'agissait juste de satisfaire une envie de voir apparaître ces résultats sous une forme un peu plus convaincante. Dans un deuxième chapitre, nous reproduisons notre travail concernant la structure de l'ensemble des représentants efficaces et les racines des homéomorphismes pseudo-Anosov. Dans le chapitre 3, nous montrons le résultat de minoration de l'entropie topologique des homéomorphismes du disque. Dans le quatrième chapitre, nous montrons les critères topologiques pour les tresses admettant une déstabilisation ou un mouvement d'échange.

Chapitre 1

La théorie des représentants efficaces

William Thurston a introduit la notion de *réseau ferroviaire* adapté à une classe d'isotopie pseudo-Anosov d'homéomorphismes $[f]$ d'une surface S . La notion de *représentant efficace*, cf [BH1], [BH2], [FM] [Lo1], [Lo3] porte essentiellement la même information qu'un réseau ferroviaire : l'action de $[f]$ sur S est décrite par une application combinatoire sur un graphe plongé dans S . L'intérêt des représentants efficaces est double : tout d'abord l'étude de la dynamique sur ce graphe (dimension 1) apporte des informations à propos de la dynamique sur la surface S (dimension 2), comme par exemple l'entropie topologique, les orbites périodiques ; l'ensemble (fini) des représentants efficaces constitue un invariant de conjugaison de la classe d'isotopie $[f]$. Mais de plus, on peut calculer explicitement, par des algorithmes finis, des représentants efficaces d'une classe d'isotopie donnée par exemple par son action sur le groupe fondamental de la surface, ou en tant que produit de twists de Dehn. L'algorithme permet aussi de détecter si la classe d'isotopie est pseudo-Anosov ou non. Les représentants efficaces sont donc à la fois porteurs d'information et calculables.

Nous exposons dans cette partie la théorie des représentants efficaces, en reprenant le travail de [BH1], [Lo1]. L'objectif ici est de démontrer le lemme 1.4.4 (unicité des motifs transverses) et la proposition 1.5.2 (l'application f_T est bien définie) de façon précise. C'est pourquoi nous ne nous étendons pas sur les résultats dynamiques évoqués ci-dessus : nous n'en retenons que ce dont nous avons besoin pour pouvoir énoncer et prouver ces résultats.

Dans la partie 1.1, nous reprenons rapidement la définition d'homéomorphisme pseudo-Anosov et nous énonçons le théorème de classification de Nielsen-Thurston. Dans la partie 1.2 nous définissons les représentants topologiques d'un homéomorphisme d'une surface S , ce sont des couples (graphe ; application ψ) où l'application ψ associe à chaque arête e du graphe un mot d'arêtes $\psi(e)$ qui décrit un chemin dans le graphe. L'image du graphe par f est dans un voisinage tubulaire du graphe appelé surface fibrée, comme sur la figure 1.5c, et l'image de chaque arête e est décrite par le mot $\psi(e)$. La partie 1.3 contient la définition des représentants efficaces d'un homéomorphisme pseudo-Anosov qui sont des représentants topologiques vérifiant un certain nombre de conditions, l'idée principale étant que les représentants efficaces ont une dynamique 'minimale' parmi les représentants topologiques. Pour les parties 1.2 et 1.3 on pourra se reporter à [BH1]. Dans la partie 1.4 nous démontrons que deux représentants efficaces d'un homéomorphisme

pseudo-Anosov qui sont équivalents (même graphe, plongements isotopes, même application) ont les mêmes mots transverses; c'est-à-dire que dans les voisinages tubulaires considérés les images des arêtes sont des arcs qui se trouvent placés dans le même ordre. Dans la partie 1.5, nous rappelons la construction d'un réseau ferroviaire à partir d'un représentant efficace. Ensuite nous utilisons les mots transverses pour reconstruire, à partir du réseau ferroviaire, une surface abstraite qui est une union de rectangles feuilletés ainsi qu'une application de cette surface dans elle-même. Cette construction est apparue dans [BH1], nous l'avons seulement justifiée un peu plus précisément. La surface abstraite ainsi construite est importante pour les applications ultérieures. Elle possède des singularités qui sont décrites dans le chapitre 2. Ensuite on reconstruit les feuilletages invariants et un représentant pseudo-Anosov de la classe d'isotopie considérée. C'est le point de départ du travail présenté dans le chapitre 2.

1.1 Théorème de classification de Nielsen-Thurston

Soit \bar{S} une surface orientée compacte et $X = \{x_0, \dots, x_n\} \subset \bar{S}$ un ensemble de $n + 1$ points marqués ($n \geq 0$). On suppose que la caractéristique d'Euler de la surface marquée $S = (\bar{S}, X)$ est négative. Un homéomorphisme de S est un homéomorphisme de \bar{S} qui préserve (globalement) l'ensemble X .

Un *feuilletage* de S est un feuilletage dont les cartes locales sont comme celles de la figure 1.1, notons qu'il possède forcément des singularités. On suppose de plus que les singularités de valence 1 (s'il y en a) sont situées en des points marqués. Si le feuilletage est régulier au voisinage d'un point marqué (i.e. 2 feuilles en sont issues), on dit quand même que ce point marqué est une singularité du feuilletage.

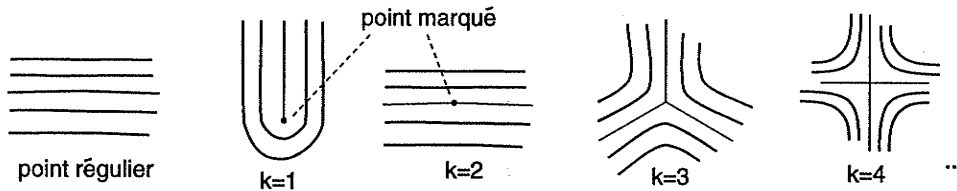


Figure 1.1: Cartes locales d'un feuilletage.

Un *feuilletage mesuré* est un feuilletage \mathcal{F} muni d'une mesure μ sur les arcs transverses aux feuilles, qui est invariante lorsque l'on déforme l'arc en gardant ses extrémités sur les mêmes feuilles. Un homéomorphisme f de S est de type *pseudo-Anosov* s'il existe une paire de feuilletages mesurés transverses (\mathcal{F}^s, μ^s) , (\mathcal{F}^u, μ^u) et un réel $\lambda > 1$ tels que les feuilletages sont invariants par f , le feuilletage stable est contracté d'un facteur λ (par rapport à la mesure) et le feuilletage instable est dilaté du même facteur λ . Le réel λ est appelé *facteur de dilatation* de f .

Le résultat fondamental suivant (cf [Th], [FLP]) donne une classification à isotopie près des homéomorphismes des surfaces :

Théorème 1.1.1 (Nielsen-Thurston) *Soit S une surface telle que $\chi(S) < 0$ et $[f]$ une classe d'isotopie d'homéomorphismes de S . Alors il existe un représentant $f_0 \in [f]$ qui est de l'un des trois types suivants :*

- i) f_0 est d'ordre fini, c'est-à-dire qu'il existe un entier positif k tel que $f_0^k = \text{id}$.
- ii) f_0 est pseudo-Anosov.
- iii) f_0 est réductible, c'est-à-dire qu'il existe une collection non triviale C de courbes fermées simples dans S qui est f_0 -invariante.

On dira par extension, suivant si on est dans le cas i), ii) ou iii), que la classe d'isotopie $[f]$ est d'ordre fini, pseudo-Anosov ou réductible.

Un autre résultat de [FLP] est l'unicité à isotopie près des feuilletages invariants :

Théorème 1.1.2 (Unicité des feuilletages) *Deux homéomorphismes pseudo-Anosov homotopes sont conjugués par un homéomorphisme isotope à l'identité. En particulier, l'application qui les conjugue transporte les feuilletages invariants de l'un sur les feuilletages invariants de l'autre.*

Dans le cas où f_0 est réductible avec $f_0(C) = C$, on découpe S le long des courbes de la collection C , et on étudie les applications de premier retour sur les composantes connexes de $S - C$; on peut leur appliquer à nouveau le théorème de classification. On voit de la sorte que les 'pièces élémentaires' permettant de construire les homéomorphismes des surfaces sont les homéomorphismes d'ordre fini et pseudo-Anosov.

1.2 Représentants topologiques

Dans cette partie, nous expliquons comment on associe des objets combinatoires qui sont des couples (graphe ; application) à une classe d'isotopie d'homéomorphismes. Les graphes considérés seront toujours munis d'un ordre cyclique en chaque sommet.

Une *surface fibrée* F est une sous-surface de S telle que le plongement $F \hookrightarrow S$ induit une équivalence d'homotopie, et F est décomposée en polygones appelés *jonctions* et en rectangles fibrés par des *traverses*, cf figure 1.2.



Figure 1.2: Modèles de jonctions de valence k .

Les jonctions et les rectangles sont recollés comme sur les modèles de la figure 1.2. Le *squelette* de la surface fibrée F est un graphe Γ ayant un sommet pour chaque jonction et une arête orientée arbitrairement pour chaque rectangle comme sur la figure 1.3. Notons $E(\Gamma)$ l'ensemble des arêtes de Γ et $R(e)$ le rectangle de F associé à l'arête e ; \bar{e} désigne l'arête e avec orientation inversée. L'arête e est *incidente* au sommet v si le début de e (qui est une arête orientée) est connecté à v . Par exemple, si c'est la fin de l'arête e qui est

connectée à v , nous dirons que l'arête \bar{e} est incidente à v . En chaque sommet v de Γ , on définit un ordre cyclique sur l'ensemble des arêtes incidentes à v : c'est l'ordre induit par l'orientation de S . Il existe un plongement du graphe Γ dans F tel que chaque sommet est envoyé dans la jonction lui correspondant, et chaque arête traverse le rectangle qui lui est associé ; de la sorte le plongement préserve l'ordre cyclique.

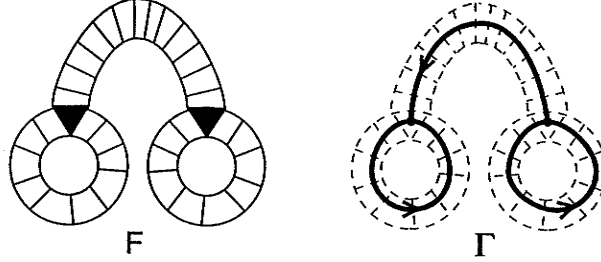


Figure 1.3: Le graphe Γ est plongé dans F .

Soit f un homéomorphisme de S et F une surface fibrée. On dit que F porte f si $f(F) \subset F$, l'image de chaque jonction est incluse dans une jonction et l'image de chaque traverse est incluse dans une traverse ou une jonction. Si F porte f et Γ est le squelette de F , alors pour chaque arête e de Γ le chemin $f(e)$ emprunte un certain nombre de rectangles. Il est décrit par un mot formé des arêtes orientées qu'il emprunte, cf figure 1.5. Ce mot est noté $\psi(e)$. L'application ψ dépend de F et de f . Dans le cas où aucun mot $\psi(e)$ ne contient d'*annulation*, c'est-à-dire de sous-mot de la forme $a\bar{a}$, on dit que le couple (Γ, ψ) est un *représentant topologique* de f .

Soit Γ^s le graphe obtenu en subdivisant le graphe Γ aux ψ -préimages des sommets. L'application ψ peut être vue comme associant à chaque arête de Γ^s une arête de Γ . Soit e une arête de Γ et $A_e = \{a_1, \dots, a_p\}$ l'ensemble des arêtes de Γ^s envoyées sur e par ψ . Les conventions prises imposent que si $\psi(a) = \bar{e}$ alors $\bar{a} \in A_e$. Le *mot transverse* de e pour (F, f) est un ordre sur A_e défini comme suit, cf [Lo3]. Soit t une traverse de $R(e)$, elle est orientée car e et S sont orientées. L'ordre sur A_e est l'ordre dans lequel on rencontre les rectangle $f(R(a_i))$ le long de t , cf figure 1.4. On voit qu'il ne dépend pas de la traverse choisie.

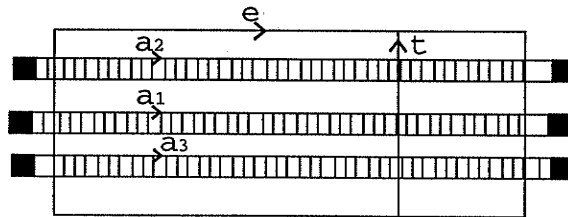


Figure 1.4: Définition du mot transverse.

Un *tournant* est une paire d'arêtes adjacentes pour l'ordre cyclique en un sommet v . Le tournant $\{a, b\}$ est *tangent* par ψ s'il existe un entier $k > 0$ tel que les mots $\psi^k(a)$ et $\psi^k(b)$ commencent par la même lettre, un tournant tangent est aussi appelé une *tangence*. Le plus petit tel entier k est alors appelé *ordre* de la tangence.

Soit v un sommet de Γ . On définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des arêtes incidentes à v engendrée par : $a \sim b$ si le tournant $\{a, b\}$ est tangent. Les classes d'équivalence sont appelées *portes*. Chaque porte est connexe relativement à l'ordre cyclique.

La *matrice d'incidence* associée à ψ est la matrice carrée dont les entrées sont indexées par $E(\Gamma)$, telle que le coefficient de place (a, b) est le nombre de fois où les lettres a et \bar{a} apparaissent dans le mot $\psi(b)$.

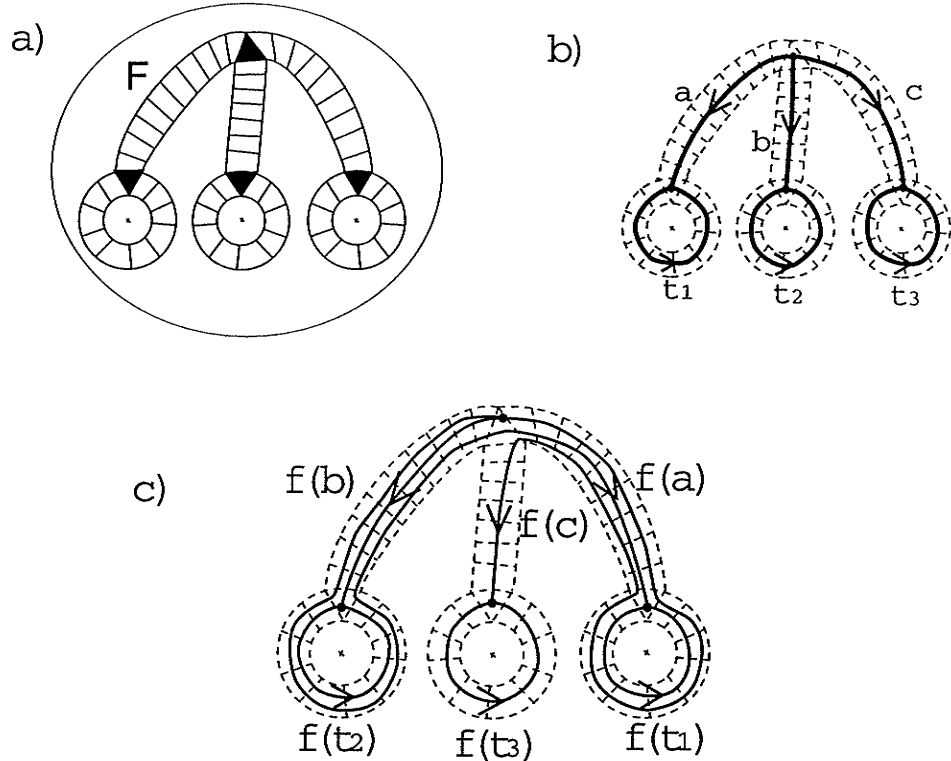


Figure 1.5: Exemple : a) la surface F ; b) le graphe Γ ; c) le graphe $f(\Gamma)$.

Exemple. Considérons la surface S qui est la sphère à 4 points marqués, que nous dessinerons comme le disque à 3 points marqués (le bord du disque correspondant au quatrième point marqué). On considère la surface fibrée F qui est sur la figure 1.5a, et un homéomorphisme f qui envoie le squelette Γ de F sur le graphe $f(\Gamma)$ représenté sur la figure 1.5c. L'application ψ associée est

$$\begin{aligned} \psi : \quad a &\longmapsto at_1\bar{a}c \\ b &\longmapsto a \\ c &\longmapsto \bar{c}t_3\bar{c}b \\ t_1 &\longmapsto t_3 \\ t_2 &\longmapsto t_1 \\ t_3 &\longmapsto t_2. \end{aligned}$$

Il y a un tournant tangent d'ordre 1 : c'est le tournant $\{a; b\}$. Si on dispose les arêtes

dans l'ordre (t_1, t_2, t_3, a, b, c) , la matrice d'incidence est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les mots transverses pour ce représentant sont :

$$\begin{aligned} \text{pour l'arête : } a &: ab\bar{a} \\ b &: c \\ c &: \bar{c}ac \\ t_1 &: at_2 \\ t_2 &: t_3 \\ t_3 &: \bar{c}t_1. \end{aligned}$$

1.3 Représentants efficaces d'un homéomorphisme pseudo-Anosov

Dans cette partie, nous définissons la notion de représentant efficace de $[f]$ en reprenant le formalisme développé dans [BH1]. On supposera que $[f]$ possède au moins deux orbites de points marqués. Des notions analogues (plus simples) sont données dans [BH1] dans le cas où il y a une seule orbite de points marqués, ou pas de points marqués.

Soit F une surface fibrée qui porte un homéomorphisme f . On suppose que $[f]$ est pseudo-Anosov et qu'il y a au moins deux orbites de points marqués. On sélectionne toutes les orbites sauf une. La surface F et l'application ψ peuvent vérifier les conditions suivantes :

(E1) Le squelette Γ de F n'a pas de sommet de valence 1.

(E2) Pour toute arête e et tout entier k , le mot $\psi^k(e)$ n'a pas d'annulation (il ne contient pas de sous-mot de la forme $a\bar{a}$).

On suppose que le graphe Γ contient un sous-graphe P , appelé *graphe périphérique*, qui est une union d'arêtes formant des boucles disjointes autour des points des orbites sélectionnées. Soit $PreP$ le sous-graphe formé des arêtes dont un itéré par ψ est inclus dans P , et H le complémentaire dans Γ de $P \cup PreP$.

(E3) Les boucles du graphe P sont permutées, de façon simpliciale.

La matrice d'incidence de ψ est alors de la forme

$$\begin{pmatrix} N & A & B \\ 0 & C & D \\ 0 & 0 & M_H \end{pmatrix}$$

où les blocs N (resp. C , resp. M_H) correspondent à P (resp. $PreP$, resp. H). La matrice N est une matrice de permutation, la matrice C est nilpotente.

(E4) La matrice M_H est irréductible.

(E5) Si le tournant $\{a, b\}$ est tangent d'ordre 1, alors la première lettre de $\psi(a)$ est dans H .

Quand les conditions (E1) à (E5) sont vérifiées, on dit que F est *efficace* pour f .

Définition : Un *représentant efficace* de $[f]$ est un triplet $T = (\Gamma, h_{\Gamma \rightarrow S}, \psi)$ où Γ désigne un graphe muni d'ordres cycliques en ses sommets ; $h_{\Gamma \rightarrow S}$ est une classe d'isotopie de plongements de Γ dans S qui respectent les ordres cycliques ; l'application ψ est une application combinatoire. Le triplet T est tel qu'il existe une surface fibrée F efficace pour un homéomorphisme dans la classe $[f]$, dont le squelette est le graphe Γ plongé de façon isotope aux éléments de $h_{\Gamma \rightarrow S}$, et l'application combinatoire induite sur Γ est ψ . Nous reprenons ce formalisme dans le chapitre 2. Nous commettrons parfois ici l'abus d'appeler représentant efficace soit un couple (F, f) , soit un triplet $T = (\Gamma, h_{\Gamma \rightarrow S}, \psi)$.

Cette définition se trouve légitimée par le

Théorème 1.3.1 ([BH1], [Lo1])

Si $[f]$ est pseudo-Anosov, alors il existe un représentant efficace de $[f]$.

Les démonstrations données dans les articles cités fournissent même un algorithme permettant de trouver un représentant efficace.

Propriété 1.3.2 *Si F est efficace pour f alors il n'existe pas de sommet v tel que l'image par ψ de toutes les arêtes issues de v commence par une même arête e .*

Preuve : Sinon, d'après (E5) l'arête e serait dans H . La matrice M_H aurait alors au moins deux coefficients non nuls sur la ligne correspondant à e . Montrons alors que pour une certaine arête b et un certain entier k , le mot $\psi^k(b)$ passe par le sommet v . D'après (E4), la matrice M_H est une matrice à coefficients entiers positifs ou nuls, irréductible donc transitive. L'une des lignes contient au moins deux coefficients non nuls. Dans ces conditions, l'une des colonnes possède au moins deux coefficients non nuls. Il est alors aisé de vérifier qu'une certaine puissance de la matrice M_H possède une colonne où la somme des coefficients vaut au moins 3. Ceci veut dire qu'il existe une arête b et un entier p tels que le mot $\psi^p(b)$ contient au moins 3 arêtes de H . Soit a une arête de H dans le mot $\psi^p(b)$ qui n'est ni au début ni à la fin de ce mot. L'arête a est envoyée par un certain itéré ψ^q sur un mot qui contient une arête a' issue de v puisque M_H est transitive. Le mot $\psi^{p+q}(b)$ contient la lettre a' , celle-ci n'étant ni à la fin ni au début du mot. En posant $k = p + q$, ceci signifie que le mot $\psi^k(b)$ passe par le sommet v . Mais alors $\psi^{k+1}(b)$ a une annulation, ce qui contredit (E2). \square

Exemple : Le représentant topologique donné dans la partie 1.2 est aussi un représentant efficace : on peut vérifier de façon élémentaire qu'il satisfait les conditions (E1) à (E5).

1.4 Les mots transverses sont bien définis

Nous montrons dans cette partie que lorsque F est efficace pour f , les mots transverses ne dépendent que de la classe d'isotopie du plongement du squelette de F et de l'application ψ .

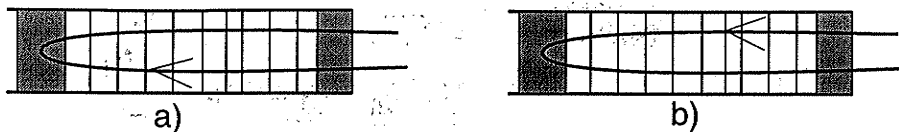


Figure 1.6: Demi-tour par la droite a) et par la gauche b).

Soit F une surface fibrée et γ un arc orienté plongé dans F de façon transverse aux traverses. Si le mot qui décrit γ a une annulation, on dit que le chemin γ fait un *demi-tour par la droite* ou par la *gauche*, cf figure 1.6.

Propriété 1.4.1 *Si (F, f) est efficace et γ est un arc de $f(\partial F)$ orienté dans le sens des aiguilles d'une montre, alors le chemin γ ne fait pas de demi-tour par la droite.*

Preuve : Supposons par l'absurde que $\gamma = \dots \bar{e}e \dots$ fait un demi-tour par la droite. Soit j la jonction de F qui est envoyée par f à l'endroit où γ fait le demi-tour. L'image par f de la surface F est située localement 'à la droite' de l'arc γ puisque γ est un arc dans l'image du bord orienté dans le sens des aiguilles d'une montre. Donc tous les rectangles de F issus de la jonction j sont envoyés par f dans des rectangles qui commencent par $R(e)$. Ceci veut dire que l'application ψ envoie toutes les arêtes issues du sommet v associé à j sur des mots commençant par la même lettre e . D'après la propriété 1.3.2, ceci est incompatible avec le fait que F est efficace pour f . \square

Proposition 1.4.2 *Supposons que $[f]$ est pseudo-Anosov et que (F, f) est efficace. On appelle (t_1, \dots, t_r) l'ensemble des tournants tangents, $t_i = \{a_i, b_i\}$. Pour $i \in \{1 \dots r\}$ on définit l'arc α_i par la figure 1.7a. Les arcs $f^{-1}(\alpha_i)$, $i \in \{1 \dots r\}$, joignent deux points de la frontière ∂F . Leur support est inclus dans $S - F$; ils vérifient :*

- i) *Il existe un arc β_i de ∂F joignant les extrémités de $f^{-1}(\alpha_i)$ tel que $f^{-1}(\alpha_i) \cup \beta_i$ borde un disque $D(\alpha_i)$ dans $S - F$. Les r arcs β_i sont disjoints.*
- ii) *Chaque arc β_i contient exactement un tournant tangent.*
- iii) *Si p est un sous-arc d'une traverse entre deux points successifs de $f(F)$ comme sur la figure 1.10a, alors $f^{-1}(p)$ borde avec un arc γ de ∂F un disque qui est inclus dans un disque $D(\alpha_i)$, c'est-à-dire que γ est inclus dans un arc β_i .*

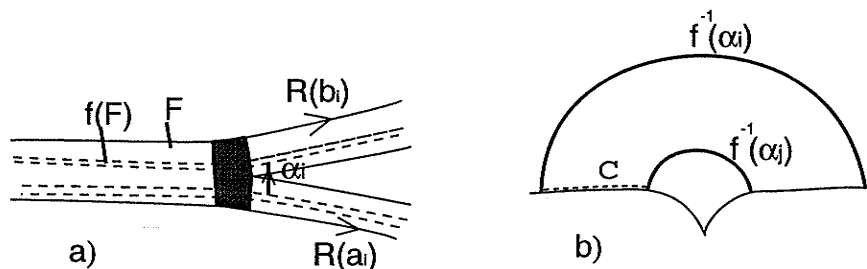


Figure 1.7: a) L'arc α_i b) situation impossible.

Preuve :

i) Comme l'arc $f^{-1}(\alpha_i)$ joint deux points de ∂F et que les composantes connexes de $S - F$ sont des disques avec un point marqué, il existe un unique arc β_i dans ∂F tel que $f^{-1}(\alpha_i) \cup \beta_i$ borde un disque $D(\alpha_i)$.

Supposons par l'absurde que les arcs β_i ne sont pas deux à deux disjoints, cela signifie qu'il existe $i \neq j$ et un sous-arc c de β_i qui relie une extrémité de $f^{-1}(\alpha_i)$ et une extrémité de $f^{-1}(\alpha_j)$, cf figure 1.7b. Quitte à le modifier par une petite isotopie, le chemin $f(c)$ est inclus dans F , il relie deux jonctions et est disjoint de $f(F)$ comme sur la figure 1.8. En découpant la surface F le long du chemin $f(c)$ on obtient une surface F' plongée dans S . Comme $f(F) \subset F'$ et $F' \subset F$ on voit que $f(F') \subset F'$. On note que $f(c)$ n'est pas isotope à un chemin inclus dans ∂F , car si c'était le cas $F - f(c)$ aurait deux composantes connexes dont une serait un disque ; ce disque contient des points de $f(F)$, ce qui contredit le fait que f est un difféomorphisme et F est connexe. La surface F' a donc des composantes de bord qui sont des courbes non triviales dans F donc dans S . Par ailleurs, ces courbes sont permutées (à isotopie près) par f puisque $f(F') \subset F'$. Ceci implique que f est réductible, en contradiction avec notre hypothèse.

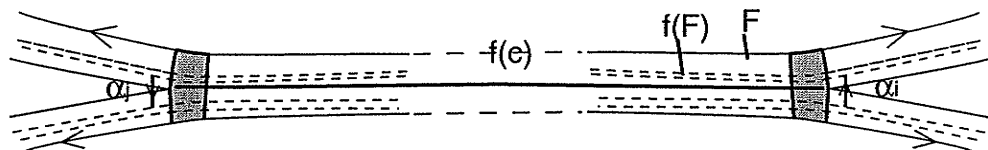


Figure 1.8: L'arc $f(c)$.

ii) L'image par f du disque $D(\alpha_i)$ est un disque bordé par l'arc α_i et l'arc $f(\beta_i)$. L'arc $f(\beta_i)$ est transverse aux traverses, le fait qu'il borde un disque avec α_i implique que le mot d'arêtes qui le décrit est trivial après que l'on ait enlevé toutes les annulations. L'image de l'arc β_i a donc au moins une annulation. L'arc β_i contient donc au moins une tangence. Il y a r tangences et r arcs β_i disjoints. On voit ainsi que chaque arc β_i contient exactement une tangence.

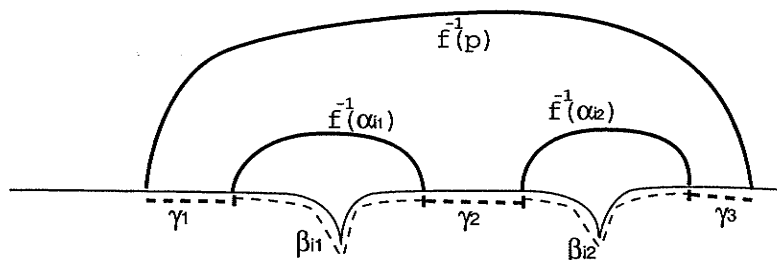


Figure 1.9: L'arc $f^{-1}(p)$ borde un disque avec $\gamma = \gamma_1 \beta_{i1} \gamma_2 \beta_{i2} \gamma_3$.

iii) L'arc $f^{-1}(p)$ est dans $S - (F \cup \bigcup_i f^{-1}(\alpha_i))$ et relie deux points de ∂F . Supposons par l'absurde qu'il ne soit pas inclus dans un disque $D(\alpha_i)$. L'arc $f^{-1}(p)$ borde un disque avec un arc γ de ∂F , on sait que $f(\gamma)$ est décrit par un mot qui est trivial après enlèvement des annulations. Appelons $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ les composantes de γ qui ne sont pas dans des β_i , comme sur la figure 1.9, cet ensemble est non vide par hypothèse. Si on ôte les

annulations correspondant aux arcs $f(\beta_i)$ dans le chemin $f(\gamma)$, on obtient le chemin $f(\gamma_1)f(\gamma_2)\dots f(\gamma_p)$. Vérifions que le chemin $f(\gamma_1)f(\gamma_2)\dots f(\gamma_p)$ n'a pas d'annulation : le chemin γ_i n'emprunte pas de tangence donc son image n'a pas d'annulation. Peut-on avoir une annulation entre la dernière lettre de $f(\gamma_i)$ et la première lettre de $f(\gamma_{i+1})$? Notons β_j l'arc situé entre γ_i et γ_{i+1} ; il est associé à la tangence $t_j = (a_j, b_j)$. La dernière lettre de $f(\gamma_i)$ est alors \bar{b}_j , la première lettre de $f(\gamma_{i+1})$ est a_j : il n'y a pas d'annulation. Le chemin $f(\gamma)$ se réduit donc à $f(\gamma_1)f(\gamma_2)\dots f(\gamma_p)$ si on enlève toutes les annulations. Ceci contredit le fait qu'il soit le mot vide. \square

Proposition 1.4.3 *Soit Γ un graphe, Γ_1 et Γ_2 deux plongement isotopes du graphe Γ . Soit F_1 et F_2 deux surfaces fibrées dont les squelettes sont les graphes Γ_1 et Γ_2 . Soient γ_1 , resp. γ_2 , un arc plongé dans F_1 , resp. F_2 , transversalement aux traverses, dont les deux points extrémités sont situés sur une même traverse. L'arc γ_1 est donc composé d'un début et d'une fin qui sont des segments à l'intérieur d'un rectangle (comme sur la figure 1.10), le reste de γ_1 est décrit par un mot d'arêtes M_1 . On définit de même un mot M_2 pour γ_2 . On suppose que les mots M_1 et M_2 sont identiques. On suppose que ce mot possède une seule annulation, où les deux chemins γ_1 et γ_2 font un demi-tour à gauche.*

Si l'arc γ_1 borde un disque avec la traverse entre ses deux extrémités, alors la même chose est vraie pour γ_2 . De plus, les extrémités de γ_2 sont dans le même ordre le long de la traverse que celles de γ_1 .

Preuve : On enlève simultanément un chemin de la forme $a\bar{a}$ à γ_1 et à γ_2 , puis on applique un raisonnement par récurrence. \square

Lemme 1.4.4 (Unicité des mots transverses) *Soit (F_1, f_1) et (F_2, f_2) deux représentants efficaces d'une même classe pseudo-Anosov tels que :*

- *Les squelettes de F_1 et de F_2 sont un même graphe combinatoire Γ , les deux plongements dans S étant isotopes.*
- *Les deux applications combinatoires ψ_1 et ψ_2 sont les mêmes.*

Alors les mots transverses sont les mêmes.

Preuve :

Soit e une arête de Γ . Supposons que le mot transverse de e pour (F_1, f_1) contient le mot a_1a_2 . Cela signifie que les rectangles $f_1(R(a_1))$ et $f_1(R(a_2))$ sont adjacents dans cet ordre dans le rectangle $R(e)$ de la surface F_1 . On considère un sous-arc p d'une traverse entre le dernier point de $f_1(R(a_1))$ et le premier point de $f_1(R(a_2))$ comme sur la figure 1.10a. D'après la proposition 1.4.2 iii), l'arc $f_1^{-1}(p)$ borde un disque D_1 avec un sous-arc γ_1 de ∂F_1 , et l'arc γ_1 est un sous-arc d'un arc β_i de la proposition 1.4.2, donc il contient au plus une tangence. Comme $\psi_1(\gamma_1)$ se réduit au mot trivial après enlèvement des annulations, on voit que γ_1 contient exactement une tangence.

D'après [Ep] il y a une isotopie ambiante de S qui transforme F_1 en F_2 et qui envoie les rectangles de F_1 sur les rectangles correspondants de F_2 . Cette isotopie transforme D_1 en un disque D_2 . Le disque D_2 est bordé par un arc γ_2 de ∂F_2 et un arc dans $S - F_2$. L'arc γ_2 est décrit par le même mot combinatoire que γ_1 . Modifions l'application f_2 par

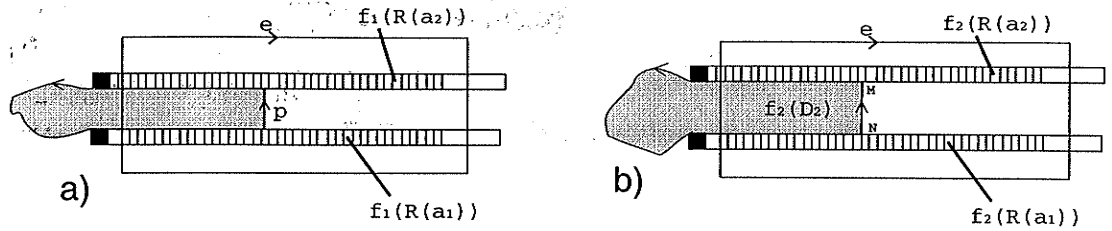


Figure 1.10: Les mots transverses sont définis.

une isotopie dont le support est dans $R(e)$ de manière à ce que les extrémités M et N de $f_2(\gamma_2)$ soient sur la même traverse de $R(e)$ dans F_2 , cf figure 1.10b. La proposition 1.4.3 montre que l'arc $f_2(\gamma_2)$ borde un disque avec la portion de traverse entre M et N . Ceci implique que les lettres a_1 et a_2 sont adjacentes dans le mot transverse de e pour (F_2, f_2) . Il suffit de considérer des traverses orientées pour voir que ces lettres sont adjacentes dans le même ordre. C'est-à-dire que $a_1 a_2$ est un sous-mot du mot transverse de e pour (F_2, f_2) . \square

1.5 Réseaux ferroviaires, feuilletages, représentant pseudo-Anosov de $[f]$

Dans cette partie, nous reprenons la construction de [BH1] d'un réseau ferroviaire à partir d'un représentant efficace (F, f) ou $T = (\Gamma, h_{\Gamma \rightarrow S}, \psi)$. A partir du réseau ferroviaire, on construit une surface feuilletée $\mathcal{R}^{[T]}$. Ensuite, nous donnons une démonstration du fait que l'on peut définir une application $f_T : \mathcal{R}^{[T]} \rightarrow \mathcal{R}^{[T]}$. Cette application permet ensuite de construire un représentant pseudo-Anosov de la classe.

Soit (F, f) un représentant efficace d'une classe d'isotopie pseudo-Anosov. Le *réseau ferroviaire* associé à (F, f) est un graphe τ plongé dans S défini de la manière suivante, cf figure 1.11. On considère le graphe Γ plongé dans S , on remplace chaque sommet v par un petit disque D_v . On identifie les extrémités de deux arêtes sur ∂D_v si elles appartiennent à la même porte. Cela définit les arêtes *réelles* de τ , qui sont donc en bijection avec les arêtes de Γ . Les *arêtes infinitésimales* de τ sont à l'intérieur des disques D_v , une arête infinitésimale relie deux points qui correspondent aux portes $[a]$ et $[b]$ dès que l'itéré d'une arête $\psi^k(e)$ passe par v en empruntant ces deux portes. Le graphe τ est ainsi défini à isotopie près à cause des choix dans le plongement de Γ , et dans les disques D_v .



Figure 1.11: Le disque D_v associé au sommet v .

On peut montrer que les motifs formés par les arêtes infinitésimales à l'intérieur des disques D_v sont des k -gones ou des k -gones incomplets, comme sur la figure 1.12.

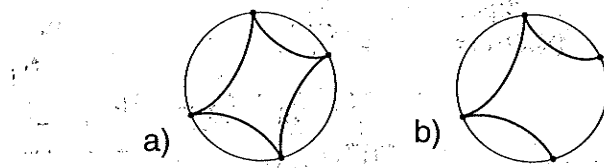


Figure 1.12: a) Un 4-gone ; b) un 4-gone incomplet.

L'application ψ induit une application ψ^τ qui associe à chaque arête de τ un chemin d'arêtes dans τ : l'image par ψ^τ de l'arête réelle e de τ est obtenue en insérant dans le mot $\psi(e)$ les arêtes infinitésimales appropriées ; l'image par ψ^τ de l'arête infinitésimale de τ entre les portes $[a]$ et $[b]$ est l'arête infinitésimale entre les portes $[\psi(a)]$ et $[\psi(b)]$. On définit les mots transverses associés aux arêtes de τ comme dans le cas d'un graphe, en considérant un voisinage tubulaire du réseau ferroviaire.

Exemple : Le réseau ferroviaire associé à l'exemple de la partie 1.2 est donné sur la figure 1.13.

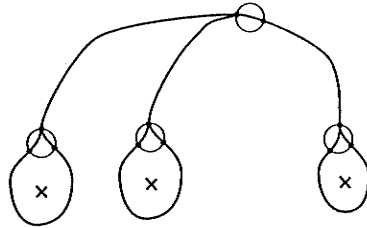


Figure 1.13: Exemple de réseau ferroviaire.

Soit M la matrice d'incidence associée à (τ, ψ^τ) . On peut montrer (cf [Lo1],[BH]) que cette matrice a pour plus grande valeur propre λ , le facteur de dilatation de $[f]$. Il existe un vecteur propre $u = (u_e)_e$ unique à proportionnalité près relatif à la valeur propre λ dont toutes les coordonnées sont positives. Ces coordonnées sont les *longueurs* associées aux arêtes de τ . Certaines arêtes ont une longueur nulle, en particulier les arêtes infinitésimales (d'où leur nom). Un vecteur propre positif v pour la matrice tM permet de définir des *largeurs* (v_e) associées aux arêtes. On peut vérifier qu'aucune largeur n'est nulle.

Proposition 1.5.1 (Conditions d'aiguillage,[BH1]) *Soit v un sommet de τ . Il y a une ou deux arêtes infinitésimales incidentes à v , et p arêtes réelles ($p \geq 1$) comme sur la figure 1.14. La somme des largeurs des arêtes infinitésimales est égale à la somme des largeurs des arêtes réelles. C'est-à-dire, dans le cas où il y a deux arêtes infinitésimales :*

$$v_{i_1} + v_{i_2} = v_{e_1} + \dots + v_{e_p}.$$

Cela se montre en utilisant le fait que les largeurs sont les coordonnées du vecteur propre v pour tM , cf [BH1].

Le réseau ferroviaire muni des largeurs $(v_e)_e$ est donc un réseau ferroviaire mesuré (cf. [Pe1]). Ceci justifie la construction d'une surface munie de deux feuilletages comme suit. Pour chaque arête e de τ on considère un rectangle feuilleté $R(e) = [0; u_e] \times [0; v_e]$ de

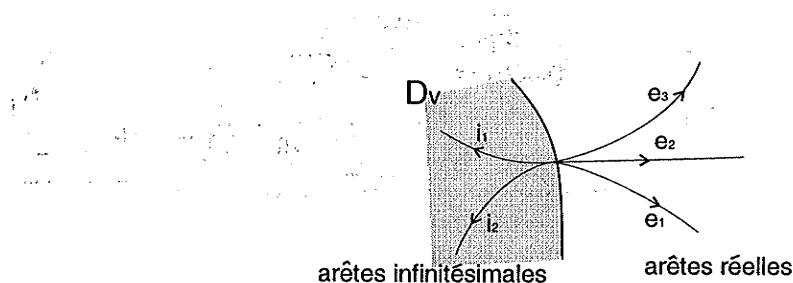


Figure 1.14: Conditions d'aiguillage.

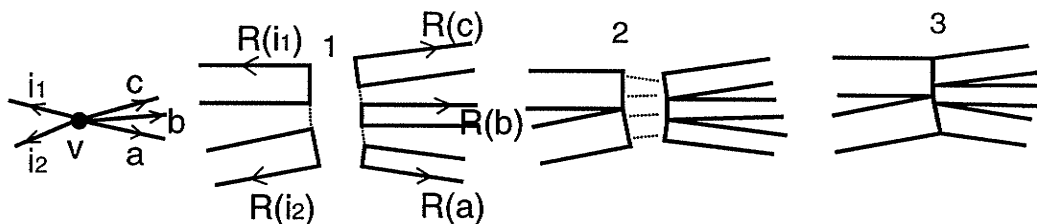


Figure 1.15: Recollement des rectangles en un sommet v .

longueur u_e et de largeur v_e . Notons que les rectangles associés aux arêtes infinitésimales sont dégénérés : leur longueur est nulle. En chaque sommet v du réseau ferroviaire on recolle les rectangles comme indiqué sur la figure 1.15 (pour plus de lisibilité de la figure, les rectangles associés aux arêtes infinitésimales ont été abusivement représentés avec des longueurs positives). On obtient ainsi une surface feuilletée avec singularités notée $\mathcal{R}^{[T]}$ ou plus simplement \mathcal{R} ; pour une description des singularités des feuilletages de \mathcal{R} on se reportera au chapitre 2. On dispose d'une classe d'homotopie de plongements $\Gamma \hookrightarrow \mathcal{R}$ qui est une équivalence d'homotopie.

On voudrait maintenant définir une application $f_T : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ qui préserve les feuilletages, dilate les longueurs d'un facteur λ et contracte les largeurs d'un facteur λ . On veut également que $f_T(R(e))$ décrive les rectangles du mot $\psi^\tau(e)$. On peut dire de façon imagée que l'application f_T est obtenue en 'épaississant' l'application ψ^τ de τ à \mathcal{R} , ou encore en épaississant l'application ψ de Γ à \mathcal{R} .

Soit τ^s le graphe τ subdivisé aux préimages de sommets par ψ^τ . On peut considérer \mathcal{R} comme une union de rectangles $R(a)$, $a \in E(\tau^s)$. Si $\psi^\tau(a) = e$, on veut que f_T envoie $R(a)$ dans $R(e)$. L'image du rectangle $R(a)$ est un rectangle $[0; \lambda u_a] \times [0; \frac{1}{\lambda} v_a]$. La longueur de $R(e)$ est λ fois celle de $R(a)$. Il suffit donc de décider à quel endroit en largeur mettre ce rectangle, cf figure 1.16. Si le mot transverse de e pour ψ est $a_1 a_2 \dots a_p a a_{p+1} \dots a_k$, alors les largeurs de ces arêtes vérifient

$$\frac{1}{\lambda} \left(\sum_{i=1}^p v_{a_i} + v_a + \sum_{i=p+1}^k v_{a_i} \right) = v_e.$$

On décide de mettre le rectangle image du rectangle $R(a)$ entre les largeurs $\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^p v_{a_i}$ et $\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^p v_{a_i} + \frac{1}{\lambda} v_a$. Plus précisément, le point de coordonnées (x, y) dans le rectangle $R(a)$ est envoyé sur le point de coordonnées $(\lambda x, \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^p v_{a_i} + \frac{1}{\lambda} y)$ de $R(e)$. On voit alors que dans chaque rectangle, les longueurs sont dilatées de λ et les largeurs sont contractées de λ .

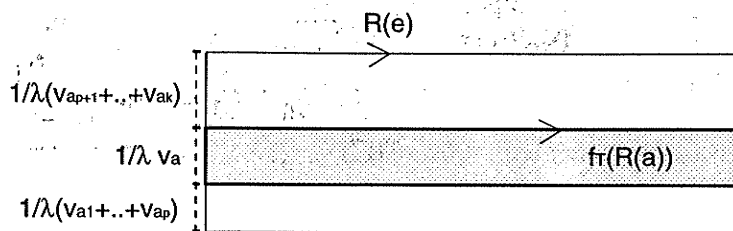


Figure 1.16: Image du rectangle $R(a)$ par f_T .

Proposition 1.5.2 *Ceci définit bien une application $f_T : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$.*

Il s'agit de vérifier que si deux points appartiennent à deux rectangles différents R_1 et R_2 et sont identifiés par les collages définis ci-dessus (c'est-à-dire s'ils correspondent au même point de \mathcal{R}), alors leurs images sont en fait les mêmes. Il suffit de le montrer dans le cas où R_1 et R_2 sont les rectangles respectivement associés à une arête infinitésimale et une arête réelle incidentes au même sommet de τ .

Soit a une arête réelle et i une arête infinitésimale issues du même sommet v de τ . Supposons que ψ^τ envoie le sommet v sur un sommet v' , l'arête a sur a' et i sur i' . Nous allons traiter le cas où il y a deux arêtes infinitésimales i et j incidentes à v , donc aussi à v' ; dans ce cas on oriente les largeurs des rectangles comme indiqué sur la figure 1.17. Nous avons dessiné les rectangles correspondant aux arêtes infinitésimales avec des longueurs positives, pour faciliter la compréhension.

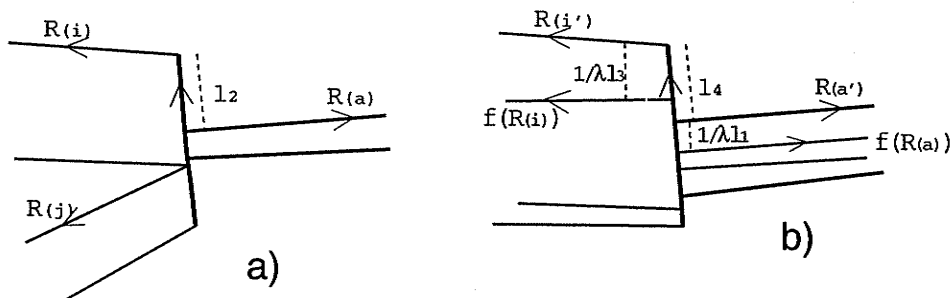


Figure 1.17: Les rectangles au sommet v a) et au sommet v' b).

Le segment $S = \{0\} \times [0; v_a]$ de $R(a)$ est recollé à un segment T de $R(i)$. On calcule l'image de S vu comme partie de $R(a)$, c'est un segment S' de $R(a')$; puis on calcule l'image de T vu comme partie de $R(i)$, c'est un segment T' de $R(i')$. Nous montrons ensuite que S' et T' sont identifiés par les recollements, cf figure 1.17.

Soit l_1 la somme des largeurs des arêtes dans le mot transverse de a' qui sont après a . Le segment $S = \{0\} \times [0; v_a]$ de $R(a)$ est envoyé sur le segment $S' = \{0\} \times [v_{a'} - \frac{1}{\lambda} l_1 - \frac{1}{\lambda} v_a; v_{a'} - \frac{1}{\lambda} l_1]$ de $R(a')$.

Soit l_2 la somme des largeurs des arêtes réelles qui sont connectées à v après a . Le segment T de $R(i)$ qui est recollé à S est alors $T = \{0\} \times [v_i - l_2 - v_a; v_i - l_2]$.

Soit l_3 la somme des largeurs des arêtes envoyées sur i' après i . Le segment $\{0\} \times [0; v_i]$ de $R(i)$ est envoyé sur le segment $\{0\} \times [v_{i'} - \frac{1}{\lambda} l_3 - \frac{1}{\lambda} v_i; v_{i'} - \frac{1}{\lambda} l_3]$ de $R(i')$. Donc l'image de T est le segment $T' = \{0\} \times [v_{i'} - \frac{1}{\lambda} l_3 - \frac{1}{\lambda} l_2 - \frac{1}{\lambda} v_a; v_{i'} - \frac{1}{\lambda} l_3 - \frac{1}{\lambda} l_2]$ de $R(i')$.

Soit l_4 la somme des largeurs des arêtes incidentes à i' au-delà de a' . Le segment $\{0\} \times [0; v_{a'}]$ de $R(a')$ est recollé au segment $\{0\} \times [v_{i'} - l_4 - v_{a'}; v_{i'} - l_4]$ de $R(i')$. Donc le segment S' est recollé au segment $\{0\} \times [v_{i'} - l_4 - \frac{1}{\lambda}l_1 - \frac{1}{\lambda}v_a; v_{i'} - l_4 - \frac{1}{\lambda}l_1]$ de $R(i')$. On veut vérifier que ce segment coïncide avec T' . Ceci équivaut à montrer l'égalité

$$\frac{1}{\lambda}l_3 + \frac{1}{\lambda}l_2 = \frac{1}{\lambda}l_1 + l_4.$$

Le terme de droite correspond à $\frac{1}{\lambda}$ fois la somme des largeurs des arêtes réelles dont l'image commence par v' qui sont envoyées après l'image de a , cf figure 1.17b. Certaines de ces arêtes sont connectées à i , elles contribuent à la somme pour une valeur de l_2 ; d'autres sont connectées à une autre arête qui est envoyée sur i' au-delà de l'image de i . La condition d'aiguillage assure que la somme de leurs largeurs est l_3 . L'application f_T est donc bien définie. \square

Remarquons que f_T n'est pas un homéomorphisme puisque certains points distincts de \mathcal{R} sont identifiés par f_T . Notons t_1, \dots, t_r les tangences réelles de Γ . Ces tangences correspondent à des singularités des feuilletages sur le bord $\partial\mathcal{R}$ (cf chapitre 2). Sur chaque arc de $\partial\mathcal{R}$ entre deux tangences réelles successives, il y a un point périodique. On montre que pour chaque tangence t_i la longueur des arcs de bord jusqu'aux deux points périodiques situés de part et d'autre de t_i est la même. En recollant ces arcs deux à deux on obtient une surface $\overline{\mathcal{R}}$. L'application f_T induit un homéomorphisme $\overline{f_T}$ de $\overline{\mathcal{R}}$, qui préserve les feuilletages, contracte le feuilletage stable d'un facteur $\frac{1}{\lambda}$ et dilate le feuilletage instable d'un facteur λ . Il y a une classe d'isotopie naturelle d'homéomorphismes $\overline{\mathcal{R}} \rightarrow S$, c'est celle qui respecte le plongement du graphe Γ . L'homéomorphisme $\overline{f_T}$ se transporte en un homéomorphisme pseudo-Anosov de S , qui est dans $[f]$. On reconstruit de la sorte un représentant pseudo-Anosov de la classe $[f]$.

1. The first part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various offices of the Board of Directors of the Corporation. The names are as follows: Mr. J. H. Smith, Mr. J. H. Jones, Mr. J. H. Brown, Mr. J. H. White, Mr. J. H. Black, Mr. J. H. Green, Mr. J. H. Gray, Mr. J. H. Blue, Mr. J. H. Red, Mr. J. H. Yellow, Mr. J. H. Purple, Mr. J. H. Pink, Mr. J. H. Orange, Mr. J. H. Silver, Mr. J. H. Gold, Mr. J. H. Platinum, Mr. J. H. Diamond, Mr. J. H. Ruby, Mr. J. H. Sapphire, Mr. J. H. Emerald, Mr. J. H. Garnet, Mr. J. H. Opal, Mr. J. H. Pearl, Mr. J. H. Ivory, Mr. J. H. Bone, Mr. J. H. Wood, Mr. J. H. Stone, Mr. J. H. Brick, Mr. J. H. Glass, Mr. J. H. Paper, Mr. J. H. Cloth, Mr. J. H. Leather, Mr. J. H. Metal, Mr. J. H. Rubber, Mr. J. H. Plastic, Mr. J. H. Wax, Mr. J. H. Resin, Mr. J. H. Cement, Mr. J. H. Concrete, Mr. J. H. Brick, Mr. J. H. Glass, Mr. J. H. Paper, Mr. J. H. Cloth, Mr. J. H. Leather, Mr. J. H. Metal, Mr. J. H. Rubber, Mr. J. H. Plastic, Mr. J. H. Wax, Mr. J. H. Resin, Mr. J. H. Cement, Mr. J. H. Concrete.

Chapitre 2

Racines des homéomorphismes pseudo-Anosov

Introduction

Soit S une surface ayant $n + 1$ points marqués $\{x_0, \dots, x_n\}$. L'idée du résultat présenté ici est née d'une envie de bien comprendre l'ensemble des représentants efficaces d'un homéomorphisme f pseudo-Anosov de S . Nous avons trouvé des résultats intéressants dans le cas où f fixe le point marqué x_0 . Les objets qui sont apparus naturellement au cours de cette étude sont les représentants *super efficaces* de f . Leur ensemble $SE(f)$ possède une structure très simple. De plus, l'étude détaillée de la structure de $SE(f)$ permet de répondre aux questions suivantes :

- 1) est-ce que f admet une racine qui fixe x_0 ?
- 2) est-ce que f admet une symétrie qui fixe x_0 ?

Plus précisément, pour la question 1) nous voulons résoudre l'équation $[f] = [g^k]$ pour un entier $k > 1$ et $g \in MCG(S)$ fixant x_0 . Pour la question 2) nous voulons savoir s'il existe un élément de $MCG(S)$ d'ordre fini fixant x_0 qui commute avec $[f]$, un tel élément est appelé une symétrie de $[f]$ ou de f . Un résultat de ce chapitre est le

Théorème 2.0.1 *Soit S une surface avec $n + 1$ points marqués $\{x_0, \dots, x_n\}$. Soit $[f] \in MCG(S)$ une classe d'isotopie pseudo-Anosov fixant le point marqué x_0 .*

Il existe un algorithme fini permettant de décider si $[f]$ admet une racine fixant x_0 , et de la calculer explicitement le cas échéant.

Il existe un algorithme fini permettant de décider si $[f]$ commute avec un homéomorphisme d'ordre fini fixant x_0 , et de le trouver explicitement le cas échéant.

Représentants super efficaces. Il a paru utile de mettre en évidence le plongement du graphe dans la définition des représentants efficaces. Dans le cas où f est un homéomorphisme pseudo-Anosov qui laisse fixe le point x_0 , certains représentants efficaces sont privilégiés : il s'agit des *bons représentants*. Ils vérifient, en plus d'être efficaces, les hypothèses suivantes :

- Chaque boucle b_i autour d'un point marqué x_i ($i \geq 1$) ne passe que par des sommets ayant trois portes.

- Il n'y a pas de sommet ayant deux portes, sauf les sommets correspondant aux points périodiques sur le bord $\partial\mathcal{R}$.

La donnée d'un représentant efficace T permet de construire une surface abstraite $\mathcal{R}^{[T]}$ ayant une composante de bord. Cette surface est munie de deux feuilletages mesurés transverses. En suivant une construction donnée dans [BH1], lorsque l'on recolle entre eux isométriquement certains arcs bien choisis du bord de $\mathcal{R}^{[T]}$, on obtient une copie de la surface S munie des deux feuilletages mesurés (\mathcal{F}^s, μ^s) et (\mathcal{F}^u, μ^u) invariants par f . Les arcs le long desquels on a effectué le recollement sont appelés *lignes de découpe* ('cut lines' en anglais) associées à T . Leur nom vient du fait que, réciproquement, il suffit de découper S le long de ces arcs, qui sont des segments de feuilles instables issues de x_0 , pour obtenir $\mathcal{R}^{[T]}$. Les longueurs des lignes de découpe vues comme arcs de S , mesurées avec la mesure μ^s , sont appelés *longueurs de découpe* ('cut lengths') associées au représentant T ; il y a une longueur de découpe associée à chaque feuille instable issue de x_0 . La construction permet également d'établir une bijection entre les tangences sur le bord (réelles et infinitésimales) du représentant efficace T et les feuilles instables issues de x_0 . La notion de bon représentant prend alors son sens, puisque les bons représentants ont l'avantage d'être uniquement déterminés par les longueurs de découpe, du moment que ces longueurs sont *admissibles* (proposition 2.2.4 et lemme 2.2.5). C'est-à-dire que la construction de la surface $\mathcal{R}^{[T]}$ à partir du représentant peut s'inverser : si les longueurs sont admissibles, alors $\mathcal{R}^{[T]}$ détermine un unique bon représentant. Par contre, il se peut que deux représentants efficaces différents aient les mêmes longueurs de découpe.

Un *représentant super efficace* est un bon représentant n'ayant qu'une seule tangence d'ordre 1. Cette tangence d'ordre 1 est associée à une feuille instable u_i issue de x_0 . On parle de représentant super efficace *par rapport à la feuille* u_i . Nous définissons ensuite (partie 2.4.2) une opération élémentaire qui transforme un représentant super efficace par rapport à u_i en un autre représentant super efficace par rapport à u_i . Cette opération est définie de manière unique. Elle consiste à plier ('to fold') la tangence d'ordre 1, puis à plier successivement les autres tangences d'ordre 1 éventuellement créées. Nous avons ainsi défini l'ensemble $SE(f)$ des représentants super efficaces de f , ainsi qu'une opération sur cet ensemble qui transforme un représentant super efficace en un autre.

Structure. On peut considérer seulement la structure combinatoire des représentants, à savoir le graphe Γ et l'application ψ . Notre résultat fondamental (théorème 2.4.11) exprime que l'ensemble $CSE(f)$ des représentants super efficaces combinatoires de f , muni de la transformation élémentaire, est une union de cycles, chaque cycle étant associé à une feuille instable issue de x_0 . Cela signifie que, si l'on part d'un représentant super efficace par rapport à la feuille u_i et que l'on applique l'opération élémentaire, on obtient au bout d'un nombre fini d'itérations (qui peut être majoré explicitement) un représentant super efficace qui est combinatoirement le même. Si on connaît le plongement du représentant initial et que l'on suit les plongements lors des opérations, le plongement du représentant final et celui du représentant initial diffèrent par f^q , où l'entier q est l'ordre de la permutation induite par f sur les feuilles instables issues de x_0 . De plus, on peut montrer que si deux feuilles u_i et u_j issues de x_0 sont dans la même f -orbite de feuilles, les cycles combinatoires qui leurs sont associés sont les mêmes. L'ensemble $CSE(f)$ est donc une

union de cycles, un cycle étant associé à chaque f -orbite de feuilles issues de x_0 . On donne également une opération (non unique) qui permet de passer d'un représentant par rapport à une feuille à un représentant par rapport à une autre feuille, dans le cas où ces feuilles ne sont pas dans la même orbite.

Racines, symétries. Ce résultat de structure exprime donc que les représentants combinatoires super efficaces de f sont en nombre fini. Si deux représentants super efficaces T et T' sont combinatoirement les mêmes, l'application de différence de plongement est réalisée par un homéomorphisme de S appelé *application de transition* de T à T' . Nous vérifions qu'elle commute avec f . De plus, on obtient de la sorte *tous* les homéomorphismes fixant x_0 qui commutent avec f , c'est-à-dire les racines (éventuelles) de f , et les symétries (éventuelles) de f . Cette idée est précisée par un certain nombre de propositions, où il est apparu plus simple de distinguer les cas en fonction de la permutation induite par f sur les feuilles instables issues de x_0 . Nous obtenons de la sorte un algorithme fini qui permet de décider si f admet des racines ou des symétries fixant x_0 , et de les trouver le cas échéant en calculant des applications de transition.

Problème de conjugaison. L'ensemble des représentants super efficaces de $[f]$ est facile à calculer, et il constitue un invariant de conjugaison. Ceci fournit donc une solution au problème de conjugaison parmi les éléments pseudo-Anosov du mapping class group qui fixent le point x_0 .

Ce chapitre est rédigé en anglais, il est organisé comme suit. Dans la section 2.1, nous revoyons des faits de la théorie des représentants efficaces. Dans la section 2.2 nous rappelons la construction donnée dans [BH1] pour trouver les feuilletages invariants et un représentant pseudo-Anosov de la classe, à partir d'un représentant efficace et nous introduisons la notion de *bon représentant* ('good representative') qui comporte des hypothèses techniques un peu plus fortes que les représentants efficaces. Cette construction permet de définir les *longueurs de découpe* associées à un représentant efficace. Il y a une correspondance entre les longueurs de découpe et les bons représentants/représentants efficaces, cf. proposition 2.2.4 et lemme 2.2.5. Dans la section 2.3, nous exposons des transformations des représentants efficaces : le *pliage* ('folding') qui a été introduit par Dicks [Di] et Stallings [Sta] et est fondamental dans les algorithmes [BH1], [Lo2] ; et le *collage* ('glueing') que nous introduisons ici. La section 2.4 est le cœur de ce chapitre. Nous introduisons la notion de *représentant super efficace* ('super efficient representative'), et définissons une (unique) transformation d'un représentant super efficace en un autre. Notre résultat principal, le théorème 2.4.11, exprime que l'ensemble des représentants super efficaces d'une classe d'isotopie pseudo-Anosov $[f]$ fixant x_0 est décomposée en un nombre fini de cycles. Chaque cycle est décrit en appliquant la transformation élémentaire. Le rapport entre la dynamique de l'homéomorphisme pseudo-Anosov et les cycles de représentants super efficaces est le suivant. Les feuilles instables issues de x_0 sont permutées sous l'action de f . Il y a un cycle de représentants super efficaces associé à chaque cycle de feuilles issues de x_0 .

Dans la section 2.5 nous exploitons les conséquences du théorème 2.4.11 et analysons plus finement la structure des cycles de représentants super efficaces. Cette structure est

reliée à l'existence de racines de $[f]$ ou de symétries pour f . Plus précisément, le théorème 2.4.11 assure que si T est un représentant super efficace de $[f]$ alors un certain nombre de représentants super efficaces de $[f]$ sont combinatoirement équivalents à T , ce sont ceux dont le plongement diffère d'une puissance de $[f]$ par rapport à celui de T . Si on trouve d'autres représentants super efficaces qui sont combinatoirement équivalents à T , alors la différence de plongement peut être une racine de $[f]$ ou une symétrie.

Dans la section 2.7 nous montrons que les représentants super efficaces fournissent des invariants complets de conjugaison pour les éléments pseudo-Anosov du mapping class group fixant x_0 . Des solutions au problème de conjugaison ont été obtenues par Hemion [He] et Mosher [Mo]. Ces solutions ne sont pas explicitement algorithmiques. Notre solution est un raffinement de celle donnée par Los [Lo2] pour le groupe $Out(F_n)$ des automorphismes externes irréductibles du groupe libre de rang n . En particulier nous donnons une autre preuve du fait que l'ensemble des bons représentants est connexe. Dans la section 2.8 nous donnons un exemple où nous calculons le cycle de représentants super efficaces, et un exemple où nous trouvons qu'un homéomorphisme donné admet une racine et reconstruisons cette racine. Nous esquissons aussi un exemple d'homéomorphisme admettant une symétrie.

2.1 Generalities

2.1.1 Representatives

Let \bar{S} be a compact oriented surface and $X = \{x_0, \dots, x_n\} \subset \bar{S}$ be a set of $n + 1$ distinguished points ($n \geq 0$) also called *punctures*. A homeomorphism f of the marked surface $S = (\bar{S}, X)$ is a homeomorphism of \bar{S} such that $f(X) = X$. In all this paper we will assume that $f(x_0) = x_0$.

The reader is referred to [BH1], [BH2], [Lo1], [Lo2] for the assertions that are not proved here.

Surfaces, graphs. A *fibred surface* is a subsurface F of S which is a union of polygons called *junctions*, and rectangles foliated by *ties*. They are glued together as in the models of fig.2.1. The inclusion map $F \hookrightarrow S$ is assumed to be a homotopy equivalence. Let f be

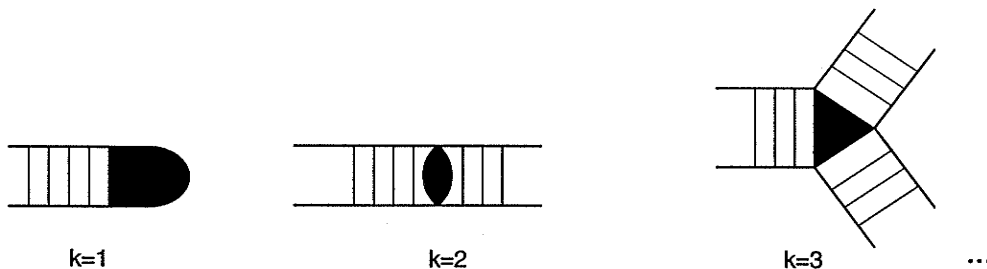


Figure 2.1: Models of junctions.

a homeomorphism of S . The fibred surface F carries f if $f(F) \subset F$, the image of every

junction is contained in a junction and the image of every tie is contained in a tie or in a junction.

An *abstract graph* is the data $\Gamma = (V, E, \mathcal{C})$ formed with a finite set V of *vertices*, a finite set $E = \{e_1 \dots e_k\}$ of *oriented edges*. The symbol \bar{e}_i denotes the edge e_i with orientation reversed. The *connecting map* \mathcal{C} is a map $E \cup \bar{E} = \{e_1 \dots e_k, \bar{e}_1 \dots \bar{e}_k\} \rightarrow V$ that associates to each (oriented) edge its initial vertex. The set $\mathcal{C}^{-1}(v)$ is called the *star* of the vertex v , denoted $St(v)$. An *ordered graph* is given the extra data of a cyclic ordering on the star of each vertex (ordered graphs are similar to Penner's fatgraphs and to embedded graphs in [Lol]). Two edges of an ordered graph are *adjacent* if they are issued from the same vertex and one follows the other according to the cyclic ordering at this vertex.

The *spine* Γ of the fibered surface F is the ordered graph defined as follows, cf figure 2.2. It has one vertex for each junction of F and one edge corresponding to each rectangle. The connecting map \mathcal{C} comes from the glueings in F and the cyclic orderings from the orientation of \bar{S} . It is unique up to reversing the orientation of the edges.

Homotopy equivalence, combinatorial map. Let F be a fibered surface in S , and Γ the spine of F . The surface $\bar{S} - X$, the fibered surface F and the graph Γ have the same homotopy type. We give here notations for some particular classes of homotopy equivalences between these sets. The geometric realization Γ_{geo} of Γ can be embedded in S in such a way that each vertex is mapped inside the corresponding junction and each edge is mapped to the corresponding rectangle, transversely to the ties, except for its extremities that are embedded in the corresponding polygons (cf fig.2.2). Such an embedding respects the cyclic orderings and is unique up to isotopy, let $h_{\Gamma \rightarrow S}$ denote the isotopy class of this embedding. Conversely, there is a continuous map from F to Γ ,

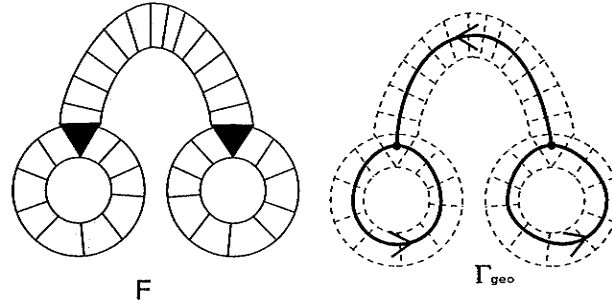


Figure 2.2: Embedding of Γ_{geo} in F .

mapping each junction to a vertex and each rectangle to the corresponding edge, in such a way that each tie is mapped to a single point in the interior of an edge, and the preimage of each point is a single tie. This map can be extended to a continuous map from $\bar{S} - X$ to Γ because the complementary components of F in $\bar{S} - X$ are once punctured disks. The map $\bar{S} - X \rightarrow \Gamma$ is unique up to homotopy. We call $h_{S \rightarrow \Gamma}$ its homotopy class. Let the symbol \cong denote an homotopy between two maps. Then we have :

$$h_{\Gamma \rightarrow S} \circ h_{S \rightarrow \Gamma} \cong id_S,$$

$$h_{S \rightarrow \Gamma} \circ h_{\Gamma \rightarrow S} \cong id_{\Gamma}.$$

We assume that F carries f , let Γ be the spine of F . For every edge e of Γ , $h_{S \rightarrow \Gamma} \circ f \circ h_{\Gamma \rightarrow S}(e)$ is an edge path in Γ . Let $\psi(e)$ denote the word in the letters $\{e_1 \dots e_k, \bar{e}_1 \dots \bar{e}_k\}$ describing this edge path. The map $\psi : \Gamma \rightarrow \Gamma$ can be viewed either as a combinatorial map from $E = E(\Gamma)$ to the set of words in letters $\{e_1 \dots e_k, \bar{e}_1 \dots \bar{e}_k\}$, or as a continuous map from Γ_{geo} to itself. One says that (F, f) is a *representative* of $[f]$ if F carries f and for every edge e of Γ the word $\psi(e)$ does not backtrack (it contains no subword of the form $a\bar{a}$).

Note : From now on we will make the abuse of notation by denoting the graph Γ and its geometric realization Γ_{geo} with the same letter Γ , for it is convenient to call ‘edge of Γ ’ either an element of $E \cup \bar{E}$, a map $[0; 1] \rightarrow \Gamma_{geo}$ or the subset of Γ_{geo} defined by this map.

Efficient representatives. A subgraph Γ_0 of Γ is ψ -invariant if the image under ψ of every edge of Γ_0 is an edge path in Γ_0 , in other words $\psi(\Gamma_0) \subset \Gamma_0$.

A representative F of $[f]$ may satisfy the following properties (cf [BH1]).

(G1) The graph Γ has no valence one vertex.

(G2) For every edge e and every integer $k > 0$ the word $\psi^k(e)$ does not backtrack.

A *turn* is a pair of adjacent edges starting at the same vertex v . The edge-path p crosses the turn $\{a, b\}$ if p contains the subword $\bar{a}b$ or $\bar{b}a$. The turn $\{a, b\}$ is *tangent* under ψ if there exists $k > 0$ such that the words $\psi^k(a)$ and $\psi^k(b)$ start with the same letter. The smallest such integer k is called the *order* of the turn. Let $v \in V$, one defines an equivalence relation on $St(v)$ as follows. Let $a, b \in St(v)$, one says $a \sim b$ if the turn $\{a, b\}$ is tangent. The equivalence classes are called *gates*.

The gates are connected with respect to the cyclic ordering defined on $St(v)$. If $[f]$ is pseudo-Anosov and (F, f) satisfies (G1) and (G2) then every vertex has at least two gates. If there was a vertex with one gate, a reduction curve could be found.

The *incidence matrix* associated to ψ is the square matrix with entries labelled by $E(\Gamma)$ such that the entry in the place (a, b) is the number of times the letter b or \bar{b} appears in the word $\psi(a)$.

In the graph Γ there is a closed edge path b_i corresponding to the loop around the puncture x_i for $0 \leq i \leq n$. Let P be the subgraph formed by the union of the loops $b_i, i \geq 1$. The letter P stands for *peripheral* graph. Let $preP$ be the subgraph formed by the edges which are eventually mapped to P . Let H be the complement of $P \cup preP$ in Γ .

(G3) The loops $b_i, i \geq 1$ are permuted under ψ . The map ψ restricted to P is a simplicial homeomorphism.

If condition (G3) is satisfied in addition to (G1) and (G2), then every tangent turn is a turn crossed by b_0 (up to reversing the orientation of the path b_0).

(G3') Every vertex v that is crossed by some loop $b_i, i \geq 1$ has three gates.

When condition (G3) is satisfied, the transition matrix of ψ is of the form

$$\begin{pmatrix} N & A & B \\ 0 & C & D \\ 0 & 0 & M_H \end{pmatrix}$$

Where the block N (resp. C , resp. M_H), corresponds to P (resp. $preP$, resp. H). The matrix N is a permutation matrix, and a power of the matrix C is the zero matrix.

(G4) The matrix M_H is irreducible.

(G5) If the turn $\{a, b\}$ is tangent of order one, then the first letter of $\psi(a)$ belongs to an edge of H .

We note that this condition is symmetric in a and b because when $\{a, b\}$ is tangent of order one, the first letter of $\psi(a)$ is the same as the first letter of $\psi(b)$.

When the conditions (G1) (G2) (G3) (G4) (G5) are satisfied, one says that (F, f) is an *efficient representative* for $[f]$.

2.1.2 Embedded representatives

We define in this section the notion of embedded efficient representative. This is the topological analog of ‘marked efficient representatives’ that are described in [BH2], [Lo2] for irreducible free group automorphisms.

Definition : an *embedded efficient representative* for $[f]$ is a triple $T = (\Gamma, h_{\Gamma \rightarrow S}, \psi)$ where Γ is an ordered graph, $h_{\Gamma \rightarrow S}$ is an isotopy class of embeddings $\Gamma \rightarrow S$ respecting the cyclic ordering at the vertices and ψ is a combinatorial map that associates to each edge of Γ an edge path. Moreover there exists a fibered surface $F \hookrightarrow S$ that carries some $f_0 \in [f]$ such that

- the spine of F is Γ ,
- the inclusion map $\Gamma \hookrightarrow S$ is in the class $h_{\Gamma \rightarrow S}$ and ψ is induced on Γ by f_0 ,
- (F, f_0) is an efficient representative.

We shall often forget the word ‘embedded’ when dealing with embedded efficient representatives, it will hopefully lead to no confusion.

The existence of embedded efficient representatives for pseudo-Anosov classes is proved in [BH1].

Notation : We will denote $\Gamma^{[T]}$ the graph associated to an embedded efficient representative T , $M^{[T]}$ the associated incidence matrix... When no confusion is possible we will omit the superscript $^{[T]}$.

Equivalence. Two embedded efficient representatives $T = (\Gamma, h_{\Gamma \rightarrow S}, \psi)$ and $T' = (\Gamma', h_{\Gamma' \rightarrow S}, \psi')$ are *equivalent* if there exists an isomorphism of ordered graphs $c : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ such that

- a) $h_{\Gamma' \rightarrow S} \circ c = h_{\Gamma \rightarrow S}$,
- b) $c^{-1} \circ \psi' \circ c = \psi$.

When condition b) alone is satisfied, one says that T and T' are *combinatorially equivalent*.

Measure. If $T = (\Gamma, h_{\Gamma \rightarrow S}, \psi)$ is an embedded efficient representative for the pseudo-Anosov class $[f]$, the graph Γ can be endowed with a metric as follows. According to Perron-Frobenius theory, the matrix $M^{[T]}$ has a largest eigenvalue, it has multiplicity one. The corresponding eigenvector can be chosen to have non-negative entries. Let $\mathbf{u} = (u_e)_{e \in E}$ be a positive eigenvector for $M^{[T]}$ relative to the largest eigenvalue. The length of the edge e is defined to be u_e . Some edges may have length 0, they are the edges of P and $preP$ (see [BH1] or [Lo1] for more details).

A *measured embedded representative* is a couple (T, l) in which T is an embedded efficient representative and the real l is the sum of the lengths of the edges of Γ , that is to say the sum of the entries of the chosen eigenvector. The real l is called the *total length* of the measured representative (T, l) . The eigenvector \mathbf{u} is uniquely defined up to scale. Hence the lengths of the edges are unique up to scale. Therefore when the total length is known, all the lengths of the edges are known. We will often use the notation T when dealing with measured representatives.

2.1.3 Invariant train tracks

Train tracks. Let $T = (\Gamma, h_{\Gamma \rightarrow S}, \psi)$ be an embedded efficient representative for $[f]$. The *train tracks* $\tau^{[T]}$ associated to T is a graph embedded in S defined as follows. It has *real* and *infinitesimal* edges. Every real edge corresponds to an edge of Γ . One selects an embedding $i \in h_{\Gamma \rightarrow S}$ and calls $G = i(\Gamma)$. One replaces each vertex v of G with a small disk D_v and identifies the end points of two edges of G on the boundary of D_v when they belong to the same gate. These are the real edges of τ (cf fig.2.3). The infinitesimal edges are disjointly embedded inside the disks D_v . One infinitesimal edge joins two gates $[a]$ and $[b]$ whenever there is a path $\psi^k(e)$ that contains the subword $\bar{b}a$ or $\bar{a}b$. The embedding of the graph $\tau^{[T]}$ is defined up to isotopy, because of the choice of $i \in h_{\Gamma \rightarrow S}$ and of the disks $\{D_v\}$.

It is proved in [BH1] that when $[f]$ is pseudo-Anosov the only possible patterns of infinitesimal edges in the disk D_v are k -gons and uncomplete k -gons where k is the number of gates at the vertex v (cf fig.2.4). A turn in Γ defined by two edges that are in the same gate is a *tangent turn*. A tangent turn in Γ defines a turn between two real edges in $\tau^{[T]}$, called a *real tangency*. Two infinitesimal edges are *tangent* if they are issued from the same gate, they define an *infinitesimal tangency*.



Figure 2.3: Train track.

One constructs a combinatorial map ψ_τ mapping each edge of τ to an edge path as follows. If e is a real edge of τ , the edge path $\psi_\tau(e)$ is the edge path $\psi(e)$ with the

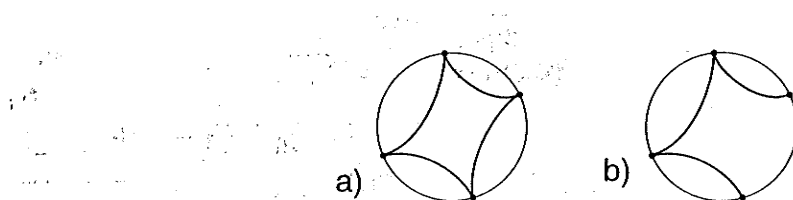


Figure 2.4: 4-gon (a) and uncomplete 4-gon (b).

appropriate infinitesimal edge inserted at each vertex crossed by $\psi(e)$. The infinitesimal edges are permuted under ψ_τ , according to the permutation induced by ψ on the gates.

2.2 Rectangle surfaces

2.2.1 Construction of the surface $\mathcal{R}^{[T]}$

In this section we construct a surface associated to an embedded efficient representative T . It is called the rectangle surface associated to T and is endowed with two measured foliations (this follows a construction of [BH1]).

Rectangles, glueings. Let T be an embedded efficient representative for $[f]$, and $\tau^{[T]}$ be the associated train track. Let $\mathbf{u} = (u_e)_{e \in E(\tau)}$ (resp. $\mathbf{v} = (v_e)_{e \in E(\tau)}$) be a positive eigenvector of the incidence matrix M_τ (resp. of the transpose matrix ${}^t M_\tau$) for the largest eigenvalue λ . For each edge e of τ one considers the parametrized rectangle $R(e) = [0; u_e] \times [0; v_e]$ associated to e having *length* u_e and *width* v_e . This rectangle is foliated with a *stable foliation* whose leaves are $\{s\} \times [0; v_e]$ and an *unstable foliation* with leaves $[0; u_e] \times \{s\}$. One first thinks of the rectangles $\{R(e)\}_{e \in E(\tau)}$ as a disjoint union. Note that the rectangles associated to edges with length 0, in particular the infinitesimal edges, are degenerate : they are of the form $\{0\} \times [0; v_e]$. It is easy to check that no rectangle has width zero.

The *glueing operations* between the rectangles are the isometric glueings defined by fig.2.5. The fact that the rectangles can be glued together in an isometric way comes from the *switch conditions* (cf [Lo1], [BH1]), that imply that the widths of the two pieces in step 2 of figure 2.5 are equal.

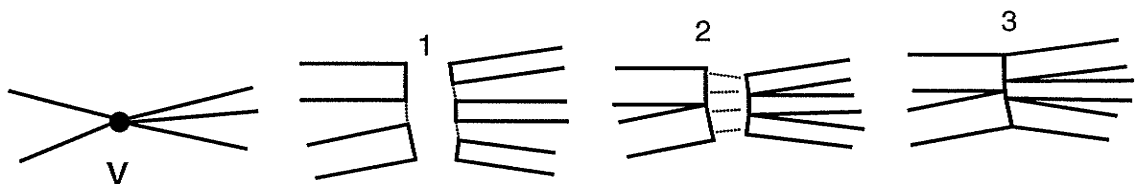


Figure 2.5: Glueings.

There is a special case when a real edge has length zero. It is then an edge in a loop b_i with $i > 0$. In fact all the real edges around the puncture x_i have length zero because of condition (G3). The local result of the glueings corresponding to all the vertices of τ around the puncture x_i is a singularity denoted $x_i(\mathcal{R}^{[T]})$, cf fig.2.6iv. The number of

singular unstable leaves issued from $x_i(\mathcal{R}^{[T]})$ is $\sum_v k(v) - 2$ where the sum is taken over all vertices crossed by b_i and $k(v)$ is the number of gates of the vertex v . The distinguished points of $\mathcal{R}^{[T]}$ are defined to be the singularities $x_i(\mathcal{R}^{[T]})$, $1 \leq i \leq n$.

Definition : Let $\mathcal{R}^{[T]}$ be the space obtained after performing all the glueings defined above. It is called the *rectangle surface* associated to T . It has n distinguished points and one boundary component. The surface $\mathcal{R}^{[T]}$ is foliated with a stable and an unstable foliation which are transverse.

Singularities of $\mathcal{R}^{[T]}$. The singularities of the foliations are of the following types (cf fig.2.6) :

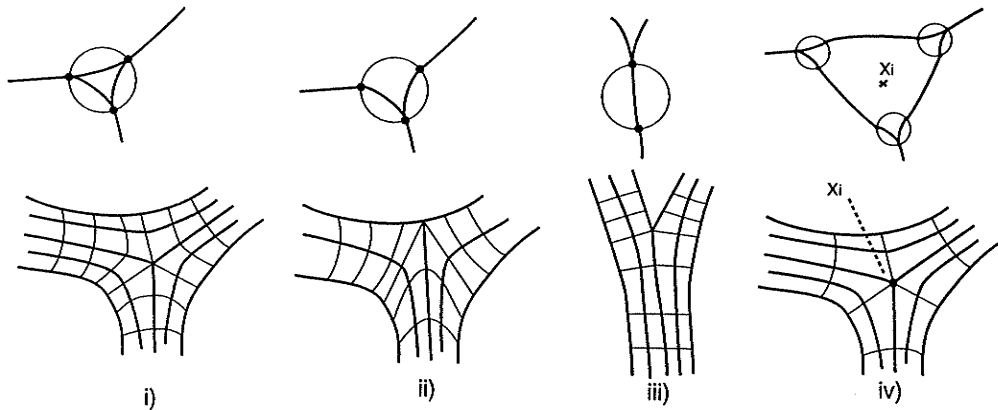


Figure 2.6: Local pictures of the train track and singularities of the surface $\mathcal{R}^{[T]}$.

- i) Let v be a vertex of Γ such that the associated disk D_v of τ contains a k -gon ($k \geq 3$) ; then all the real edges incident to v have positive length. The two foliations have a common singularity with k singular leaves in the interior of $\mathcal{R}^{[T]}$.
- ii) Let v be a vertex of Γ such that the associated disk D_v of τ contains a k -gon ($k \geq 3$) with one side missing that is on b_0 . The foliations have a common singularity on the boundary of $\mathcal{R}^{[T]}$. The unstable foliation has k singular leaves, 2 of which coincide locally with the boundary. The stable foliation has $k - 1$ singular leaves.
- iii) Let $\{a, b\}$ be a tangent turn of Γ . The foliations have a singularity on the boundary of $\mathcal{R}^{[T]}$. The unstable foliation has 3 singular leaves, two of them coincide locally with $\partial\mathcal{R}^{[T]}$. The stable foliation has 2 singular leaves.
- iv) The distinguished points $x_i(\mathcal{R}^{[T]})$ are singularities of the foliations (they may have valence two and then the local model is not singular, but we still call them singularities). There is a special case when b_i crosses only one edge whose initial and terminal vertex has 3 gates : the resulting singularity is a 1-prong singularity.

Homotopy equivalences. The set of *distinguished points* of $\mathcal{R}^{[T]}$ is $\{x_i(\mathcal{R}^{[T]})\}_{1 \leq i \leq n}$. The graph Γ can be embedded in the surface $\mathcal{R}^{[T]}$ in a natural way, since the surface $\mathcal{R}^{[T]} - \cup x_i(\mathcal{R}^{[T]})$ is homotopically equivalent to a regular neighborhood of Γ . Moreover this embedding respects the cyclic orderings at the vertices. Let $h_{\Gamma \rightarrow R}$ denote the isotopy class of such an embedding.

One defines a class of retractions $h_{R \rightarrow \Gamma} : \mathcal{R}^{[T]} - \cup x_i(\mathcal{R}^{[T]}) \rightarrow \Gamma$ such that

$$h_{R \rightarrow \Gamma} \circ h_{\Gamma \rightarrow R} \cong \text{id}_{\Gamma},$$

$$h_{\Gamma \rightarrow R} \circ h_{R \rightarrow \Gamma} \cong \text{id}_{\mathcal{R}^{[T]}}.$$

We also define an isotopy class of continuous maps $h_{\mathcal{R} \rightarrow S} : \mathcal{R}^{[T]} - \cup x_i(\mathcal{R}^{[T]}) \rightarrow S$ and an isotopy class of continuous maps $h_{S \rightarrow \mathcal{R}} : S \rightarrow \mathcal{R}^{[T]} - \cup x_i(\mathcal{R}^{[T]})$ such that the following diagram commutes up to homotopy :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}^{[T]} - \cup x_i(\mathcal{R}^{[T]}) & \xrightarrow{h_{\mathcal{R} \rightarrow S}} & S \\ h_{R \rightarrow \Gamma} \searrow & & \nearrow h_{\Gamma \rightarrow S} \\ & \Gamma & \end{array}$$

2.2.2 Definition of the map f_T

The action of ψ on Γ and the action of $[f]$ on S correspond to each other in the above diagram. We define here a map f_T on $\mathcal{R}^{[T]}$ corresponding to these actions. The interest of this map is that it preserves both foliations of $\mathcal{R}^{[T]}$, expanding one and shrinking the other. It will allow us to reconstruct a pseudo-Anosov representative of $[f]$, cf proposition 2.2.2. However, the map f_T is not a homeomorphism.

The map f_T shrinks the widths and expands the lengths of the rectangles with a factor λ which is the spectral radius of the matrix $M^{[T]}$. It is defined as follows. Let Γ^s be the graph obtained by subdividing the edges of Γ at the preimages of vertices and let τ^s be the corresponding train track. The fibered surface $\mathcal{R}^{[T]}$ is defined as a union of rectangles $\{R(e)\}_{e \in E(\tau)}$ glued together as described above. It can be considered also as a union of rectangles $\{R(a)\}_{a \in E(\tau^s)}$ glued together. Let a be an edge of τ^s , then $\psi(a)$ is a single edge of τ and the length of the rectangle $R(\psi(a))$ is λ times the length of $R(a)$. The map f_T is defined to map the rectangle $R(a)$ to the rectangle $R(\psi(a))$. The position of $f_T(R(a))$ in $R(\psi(a))$ is given by the ‘transversal word’ defined in [Lo3].

The map f_T preserves the foliations of $\mathcal{R}^{[T]}$. It permutes the singularities of types i), ii) and iv) above. However, the singularities of type iii) are not permuted because real tangencies are not always mapped to real tangencies. It expands the unstable foliation by a factor λ . It shrinks the stable foliation by a factor $\frac{1}{\lambda}$. It is injective on the interior of $\mathcal{R}^{[T]}$.

However the map f_T does not preserve the boundary $\partial \mathcal{R}^{[T]}$. Indeed some points of $\partial \mathcal{R}^{[T]}$ are mapped to the interior of $\mathcal{R}^{[T]}$.

Proposition 2.2.1 *Let f be any representative of the class $[f]$. The map $h_{\mathcal{R} \rightarrow S} \circ f_T : \mathcal{R}^{[T]} \rightarrow S$ is homotopic to $f \circ h_{\mathcal{R} \rightarrow S}$.*

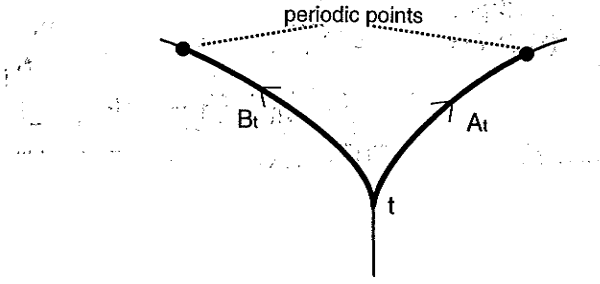


Figure 2.7: The smooth arcs A_t and B_t .

Proof : The map f_T is isotopic to a map $\widehat{f_T} : \mathcal{R}^{[T]} \rightarrow \mathcal{R}^{[T]}$ such that for every edge $e \in E(\Gamma)$

$$h_{R \rightarrow \Gamma} \circ \widehat{f_T} \circ h_{\Gamma \rightarrow R}(e) = \psi(e).$$

When postcomposing with $h_{\Gamma \rightarrow S}$ it comes

$$h_{R \rightarrow S} \circ f_T \circ h_{\Gamma \rightarrow R} \cong h_{\Gamma \rightarrow S} \circ \psi \cong f \circ h_{\Gamma \rightarrow S}. \square$$

2.2.3 Dynamics of f_T

Cut lengths I. Let T be an embedded efficient representative for a pseudo-Anosov class $[f]$. The lengths of the edges of Γ are defined up to scaling by the choice of a positive eigenvector for $M^{[T]}$. A *real tangency* on $\partial\mathcal{R}^{[T]}$ is a point where the foliations have a singularity of type iii). There are a certain number of real tangencies and periodic points on the boundary $\partial\mathcal{R}^{[T]}$. If t is a real tangency, we define the arcs A_t and B_t as on fig.2.7. They are the arcs along the boundary $\partial\mathcal{R}^{[T]}$ from t to the two adjacent periodic points. The fact that f_T preserves the foliations and expands the lengths implies that $l(A_t) = l(B_t)$. This length is called the *cut length* of the tangency t , denoted $l^{[T]}(t)$. At this point, the cut lengths are defined up to a uniform scale.

Notation : If $l \leq l^{[T]}(t)$, $A_t(l)$ denotes the initial subarc of A_t of length l and $a_t(l)$ denotes the point of A_t at a distance l from t . We define similarly $B_t(l)$ and $b_t(l)$.

Reconstruction of S . One constructs an abstract surface $\overline{\mathcal{R}}$ by identifying pairwise isometrically all the smooth arcs A_t and B_t associated to real tangencies (cf [BH1]). When performing these glueings, all the periodic points on the boundary are identified into a single point. We denote by $x_0(\overline{\mathcal{R}})$ this point. It is said to be a distinguished point of $\overline{\mathcal{R}}$. The surface $\overline{\mathcal{R}}$ is endowed with two transverse foliations, and $n+1$ distinguished points. There is a natural embedding $i : \Gamma \rightarrow \overline{\mathcal{R}}$. The surfaces $\overline{\mathcal{R}}$ and S are homeomorphic. Let $h : \overline{\mathcal{R}} \rightarrow S$ be a homeomorphism such that $h \circ i \cong h_{\Gamma \rightarrow S}$.

Proposition 2.2.2 *The map f_T induces a homeomorphism $\overline{f_T} : \overline{\mathcal{R}} \rightarrow \overline{\mathcal{R}}$. It leaves the two foliations of $\overline{\mathcal{R}}$ invariant, shrinks one and expands the other, hence it is a pseudo-Anosov homeomorphism of $\overline{\mathcal{R}}$. The map $h \circ \overline{f_T} \circ h^{-1} : S \rightarrow S$ is a pseudo-Anosov representative of $[f]$. Its invariant foliations are the images under h of the invariant foliations of $\overline{\mathcal{R}}$.*

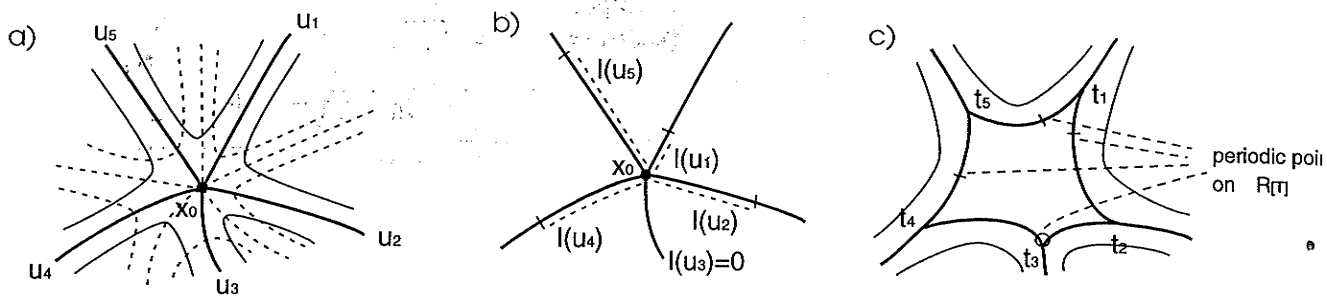


Figure 2.8: a) foliations in S ; b) examples of cut lengths ; c) foliations in $\mathcal{R}^{[T]}$.

Note : Through the glueing operation, every (real or infinitesimal) tangency of T on the boundary gives rise to an unstable leaf issued from x_0 .

Proof :

If two points M and N of $\mathcal{R}^{[T]}$ are identified under the quotient map $\mathcal{R}^{[T]} \rightarrow \overline{\mathcal{R}}$, then they belong to two arcs A_t and B_t and are at the same distance x from the tangency t . The points $f_T(M)$ and $f_T(N)$ are identified by the glueing $\mathcal{R}^{[T]} \rightarrow \overline{\mathcal{R}}$. This shows that the map $\overline{f_T}$ is well defined.

The map $\overline{f_T}$ is a homeomorphism because is it one-to-one and it is a local homeomorphism. The map $\overline{f_T}$ preserves the foliations of $\overline{\mathcal{R}}$ because the map f_T preserves the foliations of $\mathcal{R}^{[T]}$. According to proposition 2.2.1, the homeomorphism of S defined by $h \circ \overline{f_T} \circ h^{-1}$ belongs to the homotopy class $[f]$. Hence $h \circ \overline{f_T} \circ h^{-1}$ is a pseudo-Anosov representative of $[f]$. \square

Let T and T' be two efficient representatives for $[f]$. One can construct as above two pairs of invariant foliations for two elements of the class $[f]$, one associated to T and one to T' . These two pairs of invariant foliations are isotopic in a unique way, because they are the invariant foliations for two pseudo-Anosov representatives of the same isotopy class, cf [FLP]. This implies that the singular leaves issued from x_0 of these foliations correspond to each other in a unique way. We have thus defined a canonical way of pairing unstable leaves issued from the boundary of $\mathcal{R}^{[T]}$ and $\mathcal{R}^{[T']}$. But the tangencies on the boundary are in one-to-one correspondence with unstable leaves issued from x_0 . Hence we can associate in a unique way the tangencies tangencies of one representative with the tangencies of another, this was made possible because we consider embedded representatives.

Cut lengths II. Let $((\mathcal{F}^s, \mu^s), (\mathcal{F}^u, \mu^u))$ be a pair of tranverse measured foliations invariant for some pseudo-Anosov representative of $[f]$. Let u_1, \dots, u_m denote the unstable leaves issued from x_0 , so that the labels respect the ordering induced by the orientation of S . Let T be an embedded efficient representative for $[f]$. Let t_i be the tangency of T corresponding to the leaf u_i . The *cut length of the leaf u_i relative to T* is the length $l(u_i) = l^{[T]}(t_i)$, the length is measured with respect to μ^s . As a special case, if the tangency t_i is infinitesimal, then $l(u_i) = 0$. The real tangency t_i is of order one iff $\lambda l(u_i) > l(u_{\text{sigma}(i)})$.

Note : The cut length $l(u_i)$ relative to T depends on the choice of the measure μ . But the measure is unique up to scale, and the collection $(l(u_1), l(u_2), \dots, l(u_m))$ is uniformly scaled when the measure μ^s is scaled. From now on, when considering lengths, we will

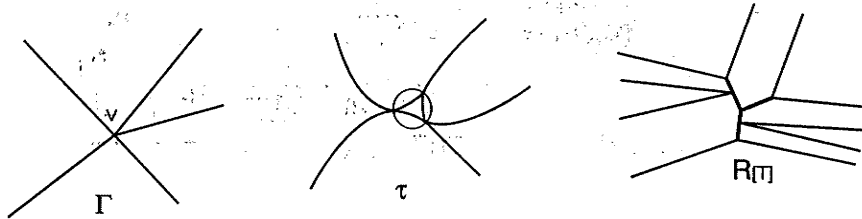


Figure 2.9: The leaves associated to the vertex v .

always assume that a measure has been fixed once and for all (in the projective class). Under this convention, the cut lengths are uniquely defined.

2.2.4 Good representatives

If the representative (F, f) is efficient, one can construct as described above a surface $\mathcal{R}^{[T]}$ endowed with a stable and an unstable foliation obtained by glueing rectangles, and a map on this surface. The map f_T defined on $\mathcal{R}^{[T]}$ has a certain number of periodic points on the boundary. Let v be a vertex of Γ . One associates to v a certain number of (maybe singular) leaves in $\mathcal{R}^{[T]}$ as follows. There is a k -gon (maybe with one side missing) in the train track $\tau^{[T]}$ that is associated to the vertex v . The stable leaves of $\mathcal{R}^{[T]}$ associated to v are defined to be the stable leaves associated to the infinitesimal edges of the k -gon, cf figure 2.9. In particular these leaves are singular leaves iff the vertex v has more than two gates.

The representative (F, f) may satisfy the following condition :

(G6) The periodic points of f_T on the boundary belong to stable leaves associated to vertices of Γ . If v is a vertex of Γ of valence 2 then there is a periodic point on the boundary on a leaf associated to v .

In other words, the periodic points on the boundary are vertices of Γ , and the valence 2 vertices (if any) are required to be associated to periodic points on the boundary.

A representative (F, f) of $[f]$ satisfying (G1) (G2) (G3) (G3') (G4) (G5) (G6) is called a *good representative*.

We define an *embedded good representative* similarly to an efficient embedded representative.

Proposition 2.2.3 (existence of good representatives) *If $[f]$ is a pseudo-Anosov class then there exists an embedded good representative T for $[f]$.*

Proof :

One considers an efficient representative for $[f]$ obtained after applying the train track algorithm [BH1]. It satisfies (G1) (G2) (G3) (G4) (G5), and the spectral radius of its incidence matrix is the growth rate of $[f]$. According to [BH1] one can make sure that there is no valence 2 vertex. If the periodic points on the boundary are not on stable leaves associated to vertices of Γ , one subdivides Γ at these points. This may create valence 2 vertices, and ensures condition (G6) is satisfied. It remains to ensure condition (G3').

No vertex crossed by a loop $b_i, i \geq 1$ has two gates for otherwise condition (G5) would fail. Let v be a vertex on a loop b_i . Let $b_i = \dots \bar{a}b \dots$ where the edges a and b are issued

from v . We now prove that in the train tracks associated to T the pattern of infinitesimal edges in the disk D_v is an uncomplete k -gon, the missing side is between the gates $[a]$ and $[b]$ like in figure 2.10a. One observes first that the edges a and b do not belong to the same gate because of (G3). If the gates $[a]$ and $[b]$ were connected by an infinitesimal edge, there would be some edge e and some $k > 0$ such that $\psi^k(e) = \dots \bar{b}a \dots$. We will see it is not possible. There is a loop b_j that is mapped to b_i under ψ^k , some vertex w of b_j is mapped to v under ψ^k because of (G3). We draw the ψ^k -images in a fibered surface that has Γ as a spine, cf fig.2.10b. The vertex w is not of valence 2. Some edges incident to w are tangent and the first letter of their ψ^k -image is a or b . This contradicts (G5). Hence the gates $[a]$ and $[b]$ are not connected by an infinitesimal edge. We have then proved that the pattern in the disk D_v is as described on fig.2.10a.

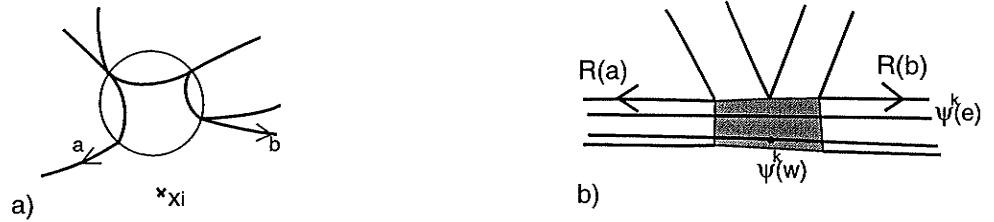


Figure 2.10: Pattern in the disk D_v (a) ; proof of proposition 2.2.3 (b).

Now, if the vertex v has more than three gates, the same holds for all the vertices in its orbit. One can *blow up* these vertices as indicated on fig. 2.11. This produces a new graph, the new map is straightforward. It satisfies (G3'). \square

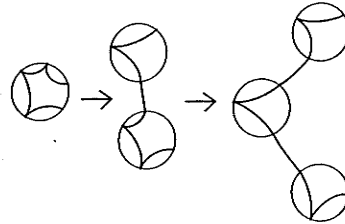


Figure 2.11: Blowing up a vertex.

2.2.5 Characterization of admissible lengths

Let f be a pseudo-Anosov homeomorphism of the surface S and let $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$ be the pair of invariant foliations for f . We choose once and for all a measure μ^s in the projective class. Let (l_1, \dots, l_m) be a set of non-negative real numbers (at least one of them is assumed to be positive) associated to the unstable leaves (u_1, \dots, u_m) of \mathcal{F}^u issued from x_0 . Let σ be the permutation such that $f(u_i) = u_{\sigma(i)}$. We want to find conditions for the lengths (l_1, \dots, l_m) to be the cut lengths associated to some embedded good representative.

The *cut line* of the leaf u_i is the initial segment of u_i in S starting from x_0 of length l_i . We call $\mathcal{L} = \mathcal{L}(l_1, \dots, l_m)$ the union of the cut lines. According to our definition, the cut

lines are unstable leaf segments in S . One can view the change of cut lengths as taking shorter or longer cut lines in S .

Definition : An *artificial singularity* relative to \mathcal{L} of the foliations $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$ in S is an endpoint of a cut line with positive cut length. The *true singularities* are the distinguished points x_0, \dots, x_n and the singularities of the foliations.

We have seen above that there is a natural identification between S equipped with the foliations and $\mathcal{R}^{[T]}$, through the surface $\overline{\mathcal{R}}$. If (l_1, \dots, l_m) are the cut lengths associated to an embedded efficient representative T , then the points of $\mathcal{R}^{[T]}$ that correspond to artificial singularities are the singularities of type iii) in the description of part 2.2.1. The points of $\mathcal{R}^{[T]}$ that correspond to true singularities are the singularities of types i), ii), iv). Every stable leaf issued from a (true or artificial) singularity meets a point of $\mathcal{L}(l_1, \dots, l_m)$ in finite length.

Proposition 2.2.4 *Let (l_1, \dots, l_m) be non-negative real numbers, at least one of them is assumed to be positive. Let $\mathcal{L}(l_1, \dots, l_m) = \mathcal{L}$ be the union of the cut lines associated to this collection. Let \mathcal{W} be the set of stable segments issued from the singularities (true or artificial) up to their first intersection with a point of \mathcal{L} .*

The lengths (l_1, \dots, l_m) are cut lengths for an embedded good representative if and only if the following properties are satisfied :

- a) $\lambda l_i \geq l_{\sigma(i)}$,
- b) *the image, under the pseudo-Anosov map f , of every artificial singularity is a point in \mathcal{W} (that may be another artificial singularity).*

Proof :

Let us assume that conditions a) and b) are satisfied, we shall construct a good representative.

First step : defining a graph.

Let us cut the surface S along $\mathcal{L} \cup \mathcal{W}$. We claim and prove that the result is a union of foliated rectangles.

Let x and y be two points in the same connected component of $S - (\mathcal{L} \cup \mathcal{W})$. We consider an arc B that is a finite union of stable and unstable segments connecting x and y , cf fig.2.12. Every pair of successive segments of B spans a rectangle with no singularities inside, for the presence of a singularity would contradict the definition of \mathcal{L} and \mathcal{W} . If B has more than two segments, the number of segments can be lowered as in fig.2.12. One eventually obtains a rectangle in $S - (\mathcal{L} \cup \mathcal{W})$ with corners x and y . The points x and y are arbitrary, this proves the claim.

Every rectangle has two sides that are segments of \mathcal{L} (the *lengths* of this rectangle) and two sides that are segments of \mathcal{W} (the *widths* of the rectangle). Let us define an embedded graph Γ from this collection of rectangles. The graph Γ has one edge for each rectangle ; one edge for each segment of \mathcal{W} issued from a distinguished point (cf fig.2.13a), these will be the peripheral edges ; and one edge for each segment of \mathcal{W} issued from an artificial singularity that does not contain a true singularity and is eventually mapped to a segment of \mathcal{W} issued from a distinguished point (cf fig.2.13b), these will be the pre-peripheral edges. In the special case when the endpoint of some cut line is in a stable

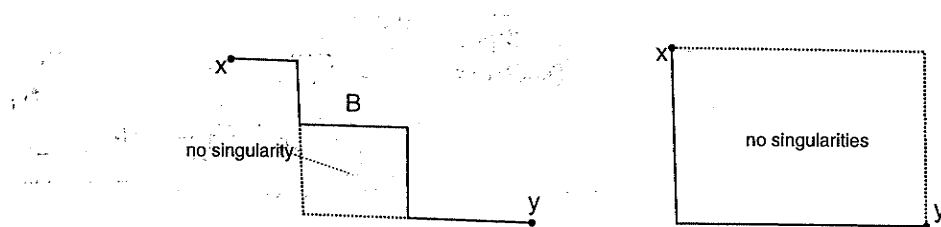


Figure 2.12: Components of $S - (W \cup \mathcal{L})$ are rectangles.

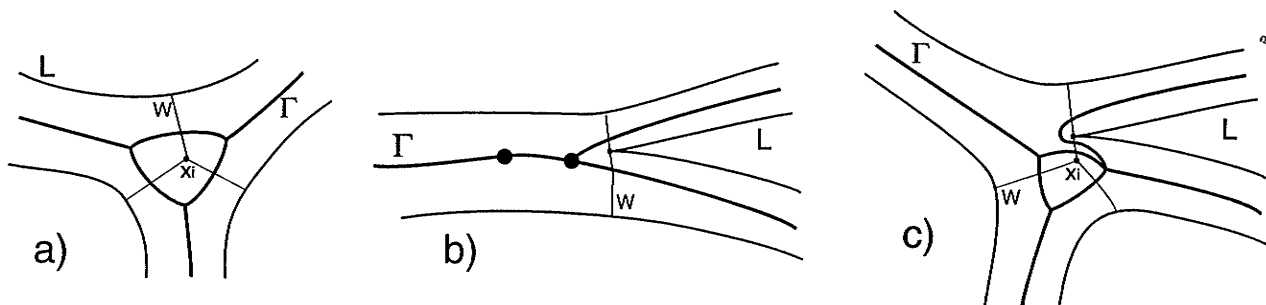


Figure 2.13: Definition of the graph Γ .

segment issued from a distinguished point, there are more than one edge attached to a peripheral edge. We define then the graph Γ as in fig.2.13c. The connections between the edges thus defined come from the connections of the rectangles like in figure 2.13.

Second step : defining a map.

Condition a) implies that $f^{-1}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$, and condition b) implies that $f(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}$. Thus the image under f of every component of $S - (\mathcal{L} \cup \mathcal{W})$ is a rectangle in $S - \mathcal{L}$, the images of the widths are contained in \mathcal{W} . Let R be a component of $S - (\mathcal{L} \cup \mathcal{W})$, it corresponds to one edge of the graph Γ defined above. For every maximal unstable leaf segment l in the rectangle R , the arc $f(l)$ crosses a certain number of rectangles and stable leaves issued from distinguished points or artificial singularities. This defines an edge path p in the graph Γ that does not depend on the choice of l in the rectangle R . A special case is when $f(l)$ starts or ends in a stable leaf s issued from a distinguished point or an artificial singularity : in this case, one decides that the peripheral or pre-peripheral edge corresponding to the leaf s does not belong to the word p . This defines the image of the edges associated to the rectangles. The image of an edge associated to a stable leaf issued from a distinguished point (peripheral edge) is the peripheral edge corresponding to the image of the stable leaf. The image of a pre-peripheral edge associated to a segment s is either the pre-peripheral edge associated to $f(s)$ in the case when $f(s)$ is not in the stable leaf issued from a distinguished point, or the peripheral edge associated to $f(s)$ in the case when $f(s)$ is in a stable leaf issued from a distinguished point.

Third step : it is a good representative.

One checks easily, after subdividing at the periodic points on the boundary if necessary, that the embedded graph and the map defined above give an embedded good representative T . The cut lengths of T are by construction precisely l_1, \dots, l_m .

The converse direction is clear from the construction of f_T and the definition of embedded good representative. \square

2.2.6 Uniqueness lemma

We have seen that an embedded efficient representative determines a unique set of m cut lengths. The converse is true in the following sense :

Lemma 2.2.5 (uniqueness lemma) *Let $f : S \rightarrow S$ be a pseudo-Anosov homeomorphism and let $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$ be its pair of invariant foliations. Consider an invariant stable measure μ^s in the projective class. Let T and T' be two embedded good representatives for $[f]$ with the same cut lengths (l_1, \dots, l_m) .*

Then the embedded representatives T and T' are equivalent.

Proof :

The proof uses the same arguments as the characterization of admissible lengths. The reconstruction of the graph and the map above is unique. Indeed the only choice in the construction was the image of the pre-peripheral and peripheral edges. This choice was uniquely determined for the map to satisfy property (G5). \square

Note : The basic result of this lemma is that when the pseudo-Anosov map is fixed (we do not allow conjugacy) and the measure μ^u is fixed (we do not allow rescaling) then admissible cut lengths determine a unique embedded good representative (up to equivalence).

2.3 Operations

Let $[f]$ be a pseudo-Anosov class of homeomorphisms of S , and let T be an embedded efficient representative for $[f]$. We define here some operations that transform T into another representative. They will be described by their effect on the graph, the embedding and the combinatorial map, as well as their effect on the cut lengths and the rectangle surface associated to the representative.

2.3.1 Foldings

The standard folding operation, as defined in [Lo2], [BH1], is defined from a tangent turn of order one $\{a, b\}$. It identifies the beginning of a with the beginning of b . The folding operation defined here involves a real tangency of order one and also a length of folding, it identifies subarcs of length l of the arcs A_t and B_t . This operation is applied to efficient representatives.

Definition of the folding operation. Consider a pair of invariant measured foliations for a pseudo-Anosov element f in the class, say (\mathcal{F}^s, μ^s) , (\mathcal{F}^u, μ^u) . The unstable leaves issued from x_0 are (u_1, \dots, u_m) , and the permutation of these leaves induced by f is denoted σ , it is induced by a rotation.

Let (l_1, \dots, l_m) be the cut lengths associated to the representative T . We denote by \mathcal{L} the union of the cut lines. The inequality $\lambda l_i \geq l_{\sigma(i)}$ holds by proposition 2.2.4. The *cancellation length* of the tangency t_i associated to u_i is defined to be $l_C(t_i) = l_i - \frac{1}{\lambda} l_{\sigma(i)}$ (it is the length of the segments of a_{t_i} and B_{t_i} that are identified by f_T). Let \mathcal{W} be the set of

stable segments issued from the (true or artificial) singularities to their first intersection with a point of \mathcal{L} .

Let $i \in \{1 \dots m\}$ be so that the tangency t_i is real of order one, that is $\lambda l_i > l_{\sigma(i)}$; and let $l \in]0; l_i - \frac{1}{\lambda} l_{\sigma(i)}]$ be so that the endpoint M of the segment of u_i issued from x_0 of length $l_i - l$ is mapped by f to a point in \mathcal{W} . In other words, $l \in]0; l_C(t_i)]$ is such that the points $a_{t_i}(l)$ and $b_{t_i}(l)$ - they are identified by f_T - are mapped to a point of \mathcal{W} .

The operation of *folding the tangency t_i with a length l* is defined by the following transformations of the graph Γ , its embedding and the combinatorial map.

Consider the rectangle surface $\mathcal{R}^{[T]}$. The two smooth subarcs of the boundary $\partial \mathcal{R}^{[T]}$ of length l issued from t_i are denoted $A_{t_i}(l)$ and $B_{t_i}(l)$. They end at some points $M_1 = a_{t_i}(l)$ and $M_2 = b_{t_i}(l)$ of $\partial \mathcal{R}^{[T]}$. The two points M_1 and M_2 are mapped to a single point M by the glueing $\mathcal{R}^{[T]} \rightarrow S$. They are identified by f_T and mapped to a point in \mathcal{W} because of our assumption on l . Along the arcs $A_{t_i}(l)$ and $B_{t_i}(l)$ there are some preimages of points of \mathcal{W} . We denote C the set of such points. If there is one point of C on $A_{t_i}(l)$ at a distance x from the tangency t_i , there is also one on $B_{t_i}(l)$ at the same distance and conversely. This is because the arcs $A_{t_i}(l)$ and $B_{t_i}(l)$ are identified by f_T .

First step : One subdivides the graph Γ at each point corresponding to a point of C . The new graph is called Γ^s . The map ψ induces in a natural way a map ψ^s on Γ^s .

Second step : There is a path of edges A in Γ^s corresponding to $A_{t_i}(l)$: A is defined to be the succession of edges crossed by $A_{t_i}(l)$. There is a special case if $A_{t_i}(l)$ ends at a point in the stable leaf issued from a distinguished point, because in that case $A_{t_i}(l)$ ends at a point corresponding to a real edge with length zero. One declares this edge to belong to A , this is to ensure that the representative T' we will construct satisfies (G5). Similarly there is a path of edges B in Γ^s corresponding to $B_{t_i}(l)$. We note that for every edge e_A of Γ^s on the path A there is an edge e_B of Γ^s on the path B at the same distance from the tangency t_i , and these two edges have the same length. The images of the edges e_A and e_B by ψ^s are the same. One identifies all such pairs of edges and calls Γ' the resulting graph. The map ψ' on Γ' is induced by ψ^s , and the class of embeddings $h_{\Gamma' \rightarrow S}$ is induced by $h_{\Gamma \rightarrow S}$.

Proposition and definition 2.3.1 *The triple $T' = (\Gamma', h_{\Gamma' \rightarrow S}, \psi')$ defines an embedded efficient representative for $[f]$. It is called the representative obtained by folding the tangency t_i with a length l . Moreover, the cut lengths associated to T' are (l'_1, \dots, l'_m) , with $l'_i = l_i - l$ and $l'_j = l_j$ if $j \neq i$.*

Proof : We check 1) T' is a representative for $[f]$ and 2) it satisfies (G1) (G2) (G3) (G4) (G5). \square

Note : the property (G3') is stable under folding. Hence, if T is a good representative then T' is also, up to removing valence 2 vertices.

Some valence 2 vertices may have been created. The rectangle surface $\mathcal{R}^{[T']}$ is obtained from $\mathcal{R}^{[T]}$ by glueing together the parts of the boundary defined by the arcs $A_{t_i}(l)$ and $B_{t_i}(l)$. The total length of the representative T' is $l(T') = l(T) - l$. When one keeps tracks of the lengths during the folding operation, the measure obtained on S when glueing back is unchanged.

Simultaneous folding, total folding. Consider now T an embedded good representative, and a set of lengths (l'_1, \dots, l'_m) associated to the tangencies, such that $l'_i \leq l_C(t_i)$ and the arcs $A_{t_i}(l'_i)$ and $B_{t_i}(l'_i)$ end at preimages of points of \mathcal{W} . It follows from the uniqueness lemma (lemma 2.2.5) that the result of performing the foldings of t_i with length l'_i does not depend (up to creating valence 2 vertices) on the order in which they are performed. The operation of performing all such foldings is called the *simultaneous folding* of $\{(t_1, l'_1), \dots, (t_m, l'_m)\}$.

The *total folding* of T is the simultaneous folding of all the tangencies with maximal length, that is when the folding length equals the cancellation length : $l'_i = l_i - \frac{1}{\lambda}l(t_{\sigma(i)})$. The total length of the resulting graph is then $\frac{1}{\lambda}l(T)$.

The following statement is easy to check.

Proposition 2.3.2 *Let f be a pseudo-Anosov representative of $[f]$, let $(\mathcal{F}^s, \mu^s), (\mathcal{F}^u, \mu^u)$ be its invariant foliations. If $T = (\Gamma, h_{\Gamma \rightarrow S}, \psi)$ is a representative for $[f]$ and g is an homeomorphism of S fixing x_0 , then the homeomorphism $g \circ f \circ g^{-1}$ is pseudo-Anosov, its invariant foliations are $g^*(\mathcal{F}^s, \mu^s)$ and $g^*(\mathcal{F}^u, \mu^u)$. The triple $g^*T = (\Gamma, g \circ h_{\Gamma \rightarrow S}, \psi)$ is a representative for $g \circ f \circ g^{-1}$. The total length of the representative g^*T , measured with respect to $g^*\mu$ is then equal to $l(T)$.*

As a special case, if $T = (\Gamma, h_{\Gamma \rightarrow S}, \psi)$ is a representative for $[f]$, then $f^*T = (\Gamma, f \circ h_{\Gamma \rightarrow S}, \psi)$ is also a representative for $[f]$. One has $l^{[f^*T]}(t_i) = \lambda l^{[T]}(t_{\sigma^{-1}(i)})$. The total length of f^*T measured with respect to μ is $l(f^*T) = \lambda l(T)$.

Lemma 2.3.3 (total folding lemma) *Let T be a good representative for $[f]$. Let T' be obtained by applying a total folding to T . Then f^*T' is combinatorially equivalent to T , up to removing valence 2 vertices.*

Proof : The cut-length associated to the unstable leaf u_i of T' is

$$l^{[T']} (t_i) = l^{[T]} (t_i) - (l^{[T]} (t_i) - \frac{1}{\lambda} l^{[T]} (t_{\sigma(i)})) = \frac{1}{\lambda} l^{[T]} (t_{\sigma(i)}).$$

Hence the cut length associated to the leaf u_i of f^*T' is

$$l^{[f^*T']} (t_i) = \lambda l^{[T']} (t_{\sigma^{-1}(i)}) = l^{[T]} (t_i).$$

T is a good representative, and f^*T' is a good representative up to removing valence 2 vertices. They have the same cut lengths. The uniqueness lemma (lemma 2.2.5) implies that T and f^*T' are equivalent up to removing valence 2 vertices. \square

2.3.2 Glueings

The notations are as in the previous subsection.

We assume that there are several cycles of real tangencies under the permutation σ , or equivalently that there are several cycles of unstable leaves issued from x_0 with positive cut length. We define here an operation that transforms one of these cycles into a cycle of infinitesimal tangencies.

The cut lengths associated to T are denoted (l_1, \dots, l_m) . Let \mathcal{O} be a σ -cycle of indices corresponding to a cycle of leaves such that $l_i > 0$ if $i \in \mathcal{O}$. We shall construct a transformation of the graph Γ , its embedding and the combinatorial map as follows.

One considers the rectangle surface $\mathcal{R}^{[T]}$, the smooth subarcs of the boundary A_{t_i} and B_{t_i} for $i \in \mathcal{O}$. On these arcs there are some preimages of points of \mathcal{W} . Let $D(i)$ be the set of $x \in]0; l(t_i)]$ such that either the point $a_{t_i}(x)$ or the point $b_{t_i}(x)$ is mapped by f_T to a point of \mathcal{W} . We note that if $x \leq l_C(t_i)$ and $x \in D(i)$ then both points $a_{t_i}(x)$ and $b_{t_i}(x)$ are mapped to a point of \mathcal{W} , because their images under f_T are the same.

First step : We subdivide the graph Γ at each point $a_{t_i}(x)$ and $b_{t_i}(x)$ for $x \in D(i)$. The new graph is called Γ^s and the new map ψ^s .

Second step : We call A_i , resp. B_i , the edge-path in Γ^s corresponding to A_{t_i} , resp. B_{t_i} , for $i \in \mathcal{O}$. One notes that for every edge e_A of Γ^s on the path A_i there is an edge e_B of Γ^s on the path B_i at the same distance from the tangency t_i , and the images of the edges e_A and e_B by ψ are either the same, or are subarcs of $A_{\sigma(i)}$ and $B_{\sigma(i)}$ at the same distance from the tangency $t_{\sigma(i)}$. We identify simultaneously all such pairs of edges and call Γ' the resulting graph. The map ψ' on Γ' is induced by ψ in a natural way, as well as the class of embeddings $h_{\Gamma' \rightarrow S}$ is induced by $h_{\Gamma \rightarrow S}$.

Note. This operation is different from the folding operation. Indeed one identifies all the arc A_{t_i} with the arc B_{t_i} , and not a part of length shorter than $l_C(t_i)$. In order to be able to do it, one must identify simultaneously all the pairs of arcs in the cycle.

Proposition and definition 2.3.4 *The triple $T' = (\Gamma', h_{\Gamma' \rightarrow S}, \psi')$ defines an embedded efficient representative for $[f]$. It is the representative obtained after glueing the cycle \mathcal{O} . The associated cut lengths are (l'_1, \dots, l'_m) , with $l'_i = 0$ if $i \in \mathcal{O}$ and $l'_i = l_i$ if $i \notin \mathcal{O}$.*

Proof : It is clear from the construction. Indeed, the new lengths are easily seen to be admissible. \square

2.3.3 Unglueing

Let T be an embedded efficient representative and \mathcal{O} a cycle of unstable elaves issued from x_0 that correspond to infinitesimal tangencies of T . We construct an embedded efficient representative T' such that the unstable leaves that have positive cut length for T' (real tangencies) are the same as for T , plus the leaves in the cycle \mathcal{O} . This operation may be considered as the converse of the glueing operation, we say that the cycle \mathcal{O} has been *unglued*.

First step : One transforms T into a representative T_1 such that the unstable leaves that have a positive cut length for T_1 are the same as for T , and the infinitesimal tangencies are located at vertices with 3 gates. This can be done by blowing up the vertices (as in figure 2.11), this creates an invariant forest. One then transforms T_1 into a representative T_2 such that the infinitesimal tangencies of T_2 are located at vertices with 3 gates and of valence 3. To do this, one has to remove the real tangencies that are located at vertices that have infinitesimal tangencies. This can be done by folding.

Second step : We take notations such that the infinitesimal tangencies of the orbit \mathcal{O} are located at the vertices v_1, \dots, v_q of the graph $\Gamma_2 = \Gamma^{[T_2]}$, the labels are so that

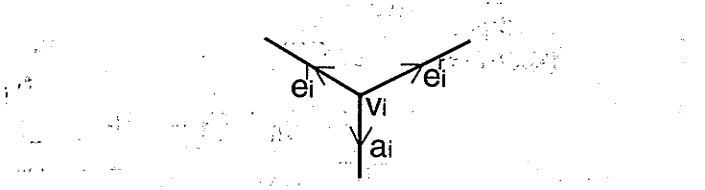


Figure 2.14: The star of the vertex v_i .

$\psi_2(v_i) = v_{i+1[q]}$. The edges of $St(v_i)$ are ordered and labelled as shown on figure 2.14, the infinitesimal tangency is between the edges e_i^l and e_i^r (the upperscript l/r stands for left/right). One then makes sure that no edge a_i is a loop (one can subdivide the graph if necessary) and that $\{a_1, \dots, a_q\}$ is not an invariant forest. One has $\psi_2(e_i^r) = e_{i+1[q]}^r \dots$ and $\psi_2(e_i^l) = e_{i+1[q]}^l \dots$ because it is a cycle of infinitesimal tangencies. Let $\psi_2(a_q) = Ma_1$, the word M may be empty. One defines a new graph Γ_3 obtained by collapsing the edge a_q in Γ_2 , the embedding $h_{\Gamma_3 \rightarrow S}$ is induced by the embedding $h_{\Gamma_2 \rightarrow S}$. One defines a map ψ_3 on the graph Γ_3 by : $\psi_3(e_q^r) = (Ma_1\psi_2(e_q^r))^*$; $\psi_3(e_q^l) = (Ma_1\psi_2(e_q^l))^*$; $\psi_3(e) = (\psi_2(e))^*$ otherwise, where A^* denotes the word A with the letter a_q removed.

Lemma 2.3.5 *The triple $T' = (\Gamma_3, h_{\Gamma_3 \rightarrow S}, \psi_3)$ is an embedded efficient representative for $[f]$. In the representative T' , the cycle \mathcal{O} has been unglued.*

Proof : No cancellation has been created in the images of the edges. There is one new tangent turn of order one : it is the turn $\{e_q^r; e_q^l\}$. One can check that the image under ψ_3 of no edge contains a subword $\overline{e_q^r}e_q^l$; hence the property (G2) is satisfied. The other properties are straightforward. \square

Let $T' = (\Gamma_3, h_{\Gamma_3 \rightarrow S}, \psi_3)$. One observes that in the cycle of real tangencies corresponding to \mathcal{O} , there is one tangency of order one, namely $\{e_q^r, e_q^l\}$.

2.4 Super efficient representatives

2.4.1 Super efficient representatives.

Let $T = (\Gamma, h_{\Gamma \rightarrow S}, \psi)$ be an embedded efficient representative for $[f]$. A vertex v of Γ is an *inner* vertex if it gives rise to a true singularity of the foliations in $\mathcal{R}^{[T]}$, cf section 2.2.5. There are two kinds of inner vertices : the vertices with more than two gates, and the vertices corresponding to the periodic points on the boundary (those may be of valency two). Note that there always exist inner vertices. The ψ -orbit of an inner vertex is composed of inner vertices.

Definition. An embedded efficient representative is a *super efficient* representative if it is a good representative with only one cycle of real tangencies, and only one real tangency of order 1. Moreover the tangency of order one is assumed to be located at an inner vertex.

Proposition 2.4.1 *Let $[f]$ be a pseudo-Anosov mapping class of S fixing x_0 . There exists a super efficient representative for $[f]$.*

To prove this proposition, we shall need the following result :

Proposition 2.4.2 *Let T be an embedded efficient representative for $[f]$. There is a real tangency t such that one of the cancellation paths $A_t(l_C)$ and $B_t(l_C)$ contains an inner vertex.*

Proof: From the above observation, there exists at least one inner vertex v for T . We claim that there is at least one inner vertex w such that some edge e is mapped by ψ to a path containing a turn of w . To see this, one considers the train track τ associated to T and the orbit of some infinitesimal edge of an inner vertex v . At least one edge of this orbit is contained in some path $\psi(e)$ by the definition of infinitesimal edges.

Hence the transversal word for some infinitesimal edge ϵ of an inner vertex is not reduced to a single infinitesimal edge. Let ϵ' be an infinitesimal edge of an inner vertex which is mapped to ϵ under ψ . Let F be a fibered surface that carries the train track τ . Consider the subtie p of the edge ϵ between the last point image of ϵ' and the next point in the image of F (see figure 2.15).

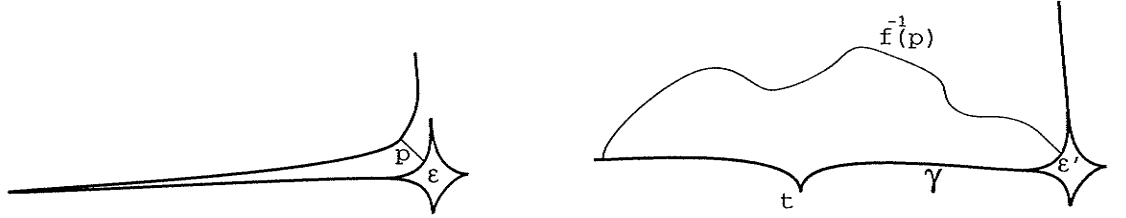


Figure 2.15: proof of proposition 2.4.2.

The preimage of the subtie p together with an arc γ in the boundary ∂F bounds a disk, cf fig.2.15. The two endpoints of p correspond in $\mathcal{R}^{[T]}$ to points that are identified by f_T . Since T is efficient there exists a tangency t along the arc γ and $x \leq l_C(t)$ such that the arc γ can be written $\overline{A_t(x)B_t(x)}$. Hence the arc γ contains the real tangency t . Therefore one of the arcs $A_t(l_C)$ or $B_t(l_C)$ passes through the edge ϵ' . Hence the corresponding path in Γ contains an inner vertex. \square

Proof of the proposition 2.4.1 :

Let us consider T an embedded efficient representative for $[f]$. If it has several cycles of real tangencies, then we glue all of them but one and call T' the resulting embedded efficient representative (cf proposition 2.3.4). The embedded efficient representative T' has only one cycle of real tangencies by proposition 2.3.4.

Let (t_1, \dots, t_q) be the cycle of real tangencies of T' . Proposition 2.4.2 ensures that, up to relabelling, a cancellation path relative to the tangency t_1 contains an inner vertex. Let l be the distance along the boundary between t_1 and the first inner vertex. If $l > 0$ then we apply a folding of length l to the tangency t_1 . Let T'' be the resulting embedded efficient representative and (l_1, \dots, l_q) the cut lengths associated to T'' . The tangency corresponding to t_1 in T'' is now located at an inner vertex.

Now we fold the tangency t_q with length $l_q - \frac{1}{\lambda}l_1$ so that the new tangency t_q is of order greater than one. The tangency t_1 in the new representative is still at an inner vertex. This process can be iterated to ensure that all the tangencies t_{q-1}, \dots, t_2 are of order greater than one.

One has then obtained an efficient representative with only one tangency of order one, located at an inner vertex. If T'' does not satisfy (G3'), then we blow up the vertices as in the proof of the proposition 2.2.3. If T'' does not satisfy (G6), then we subdivide the graph (if necessary) to make sure that the periodic points on the boundary are vertices. If there are other valence 2 vertices, we observe that they can be removed simultaneously because no vertex of Γ with valence greater than 2 is mapped to a valence 2 vertex. The proposition is proved. \square

Note : In the special case when $q = 1$ (that is, when the permutation σ on the leaves is the identity) the super efficient representative has only one Nielsen path (a Nielsen path is a path between two fixed points homotopic rel. endpoints to its image). In the similar case for irreducible free groups automorphisms, the existence of efficient representatives analogous to the super efficient representatives has been proved in [BH2], proposition 3.9.

Definition : A super efficient representative T is super efficient *relative to the leaf* u_i of the foliation if the real tangency of order one of T is associated to the leaf u_i .

If T is super efficient relative to u_i , then f^*T is super efficient relative to $u_{\sigma(i)} = f(u_i)$.

Proposition 2.4.3 *Given a pseudo-Anosov class $[f]$ fixing x_0 and u_i an unstable leaf issued from x_0 , there is at most one super efficient representative relative to u_i that has a given cut length l on the leaf u_i . There is at most one super efficient representative relative to u_i that has a given total length.*

Proof : All the cut lengths are determined by l because the tangencies t_2, \dots, t_q are of order greater than one. Indeed the cut length of $u_{\sigma^{-1}(i)}$ is $\frac{1}{\lambda}l$, the cut length of $u_{\sigma^{-2}(i)}$ is $\frac{1}{\lambda^2}l, \dots$. The cut lengths of leaves that are not in the orbit of u_i are zero. The first part of the proposition follows from the uniqueness lemma (lemma 2.2.5).

If T is a super efficient representative relative to the leaf u_i , l is the cut length of u_i and q is the order of the permutation σ induced by f on the unstable leaves issued from x_0 , then the total length is $l(T) = l(1 + \frac{1}{\lambda} + \dots + \frac{1}{\lambda^{q-1}})$. \square

Proposition 2.4.4 *Let T be a super efficient representative. Let \mathcal{L} be the union of the cut lines defined by T . Let t be an artificial singularity of S , that is an endpoint of a cut line. Then the point $f^q(t)$ belongs to a stable segment issued from a true singularity in $S - \mathcal{L}$.*

Notation : $\mathcal{W}_{\text{true}}$ is the union of the stable leaves issued from the true singularities until their first intersection with \mathcal{L} .

Proof : We assume that the leaves are labelled so that T is super efficient relative to u_1 . If $i \neq 1$ then the artificial singularity t_i is mapped by f to $t_{\sigma(i)}$. There exists $0 < k < q$ such that $\sigma^k(i) = 1$. Hence the artificial singularity t_i is mapped to t_1 under f^k . The point t_1 belongs to $\mathcal{W}_{\text{true}}$ because of the definition of super efficient representatives and $f(\mathcal{W}_{\text{true}}) \subset \mathcal{W}_{\text{true}}$. \square

2.4.2 Operations on the set of super efficient representatives

We have just proved that the set of super efficient representatives $SE(f)$ is not empty. We now define an operation that transforms a super efficient representative into another one. This operation is a uniquely defined finite sequence of foldings.

Super folding. Let T be a super efficient representative and let (t_1, \dots, t_q) be the cycle of real tangencies where t_1 is of order one. Let \mathcal{L} be the union of the cut lines in S defining T . One identifies $\mathcal{R}^{[T]}$ with S cut along \mathcal{L} like in section 2.2.3. Let $\mathcal{W}_{\text{true}}^{[T]}$ be the union of the stable leaves issued from true singularities until their first intersection with \mathcal{L} .

Let l be a length smaller than or equal to the cancellation length of t_1 and such that $A_{t_1}(l)$ or $B_{t_1}(l)$ ends at a point of $\mathcal{W}_{\text{true}}^{[T]}$. Such a length l exists by proposition 2.4.2. The *super folding* of length l consists of applying successively a folding of length l to t_1 , then a folding of length $\frac{1}{\lambda}l$ to t_q , ... a folding of length $\frac{1}{\lambda^{i+1}}l$ to t_{q-i} until $q-i=2$. Let T' be the representative thus obtained. It follows from this definition that the rectangle surface $\mathcal{R}^{[T']}$ is obtained from $\mathcal{R}^{[T]}$ by glueing successively the following pairs of arcs : $A_{t_1}(l)$ with $B_{t_1}(l)$; then $A_{t_q}(\frac{1}{\lambda}l)$ with $B_{t_q}(\frac{1}{\lambda}l)$; then $A_{t_{q-1}}(\frac{1}{\lambda^2}l)$ with $B_{t_{q-1}}(\frac{1}{\lambda^2}l)$; ... ; $A_{t_{q-i}}(\frac{1}{\lambda^{i+1}}l)$ with $B_{t_{q-i}}(\frac{1}{\lambda^{i+1}}l)$ for $i \leq q-2$.

Proposition 2.4.5 *The embedded representative T' obtained after performing the super folding of length l is super efficient. Its total length is :*

$$l(T') = l(T) - (1 + \frac{1}{\lambda} + \dots + \frac{1}{\lambda^{q-1}})l.$$

Proof : It follows from the choice of the length l that the new cut lengths are admissible. Hence T' is a good representative. Moreover it has only one real tangency of order one. \square

Elementary super folding. Let l_0 be the distance along the unstable leaf u_1 from t_1 to the first point in $\mathcal{W}_{\text{true}}^{[T]}$. The *elementary super folding* is the super folding with length l_0 . It is the 'shortest' super folding that can be applied to T .

Note. Given a super efficient representative T , the elementary super folding that is applied to T is an operation that is uniquely defined. Indeed there is only one turn that can be folded.

The elementary super folding identifies q pairs of arcs in the boundary $\partial\mathcal{R}^{[T]}$. The following proposition states that no point on the interior of these arcs belongs to $\mathcal{W}_{\text{true}}^{[T]}$.

Proposition 2.4.6 *Let T be a super efficient representative. Let l_0 be the length of the elementary super folding. Then no point in the interior of the arcs $A_{t_1}(l_0), B_{t_1}(l_0), A_{t_q}(\frac{1}{\lambda}l_0), B_{t_q}(\frac{1}{\lambda}l_0), \dots, A_{t_{q-i}}(\frac{1}{\lambda^{i+1}}l_0), B_{t_{q-i}}(\frac{1}{\lambda^{i+1}}l_0), \dots$ belongs to $\mathcal{W}_{\text{true}}^{[T]}$.*

Proof : If there were one point $M \in \mathcal{W}_{\text{true}}^{[T]}$ on $A_{t_{q-i}}(\frac{1}{\lambda^{i+1}}l_0)$ then the f_T^{i+1} -image of M would be on $A_{t_1}(l_0)$ and would also be a point of $\mathcal{W}_{\text{true}}^{[T]}$. This is impossible because there is no point of $\mathcal{W}_{\text{true}}^{[T]}$ on $A_{t_1}(l_0)$ except its endpoints by definition of l_0 . \square

Corollary 2.4.7 *The notations are as above. If $l < l_0$ then the representative T'' obtained when performing successively the foldings $(t_1, l), (t_q, \frac{1}{\lambda}l), \dots, (t_{q-i}, \frac{1}{\lambda^{i+1}}l), \dots$ is not super efficient.*

Proof : Since $l < l_0$, proposition 2.4.6 implies that no point identified by these foldings belongs to $\mathcal{W}_{\text{true}}^{[T]}$. Hence $\mathcal{W}_{\text{true}}^{[T'']} = \mathcal{W}_{\text{true}}^{[T]}$. This implies that the tangency t_1 for T'' is not on $\mathcal{W}_{\text{true}}^{[T'']}$. Hence T'' is not super efficient. This amounts to saying that the cut lengths are not admissible. \square

2.4.3 Technical results

When a super efficient representative T_2 is obtained from T_1 by applying a sequence of super foldings then $l(T_2) < l(T_1)$. The following proposition gives a lower bound on the length of the edges of T_2 . This bound will be used in the proof of lemma 2.4.9.

Proposition 2.4.8 *Let T_1 and T_2 be two super efficient representatives for $[f]$ relative to the leaf u_1 . Let q be the order of the cycles of unstable leaves issued from x_0 . We assume that $l(T_2) < l(T_1)$. Let α be the positive integer such that $l(T_2) \in [\frac{1}{\lambda^{\alpha q}} l(T_1); \frac{1}{\lambda^{(\alpha-1)q}} l(T_1)[$. Then the shortest edge with positive length of T_2 is at least as long as $\frac{1}{\lambda^{(\alpha+1)q}}$ times the shortest edge with positive length of T_1 .*

Proof : Let $\mathcal{L}^{[T_i]}$, $i = 1, 2$ be the union of the cut lines for T_i in S , and let $\mathcal{W}^{[T_i]}$, $i = 1, 2$ be the union of the stable segments issued from the singularities of T_i until their first intersection with $\mathcal{L}^{[T_i]}$ in S .

Case $\alpha = 1$. We check first that $\mathcal{W}^{[f^{-2q*}T_1]} \supset \mathcal{W}^{[T_2]}$. The cut lengths for $f^{-q*}T_1$ are $\frac{1}{\lambda^q}$ times the cut lengths for T_1 because the map f^{-q} preserves the foliations, fixes the unstable leaves at x_0 and shrinks the lengths by a factor λ^q . Under the hypothesis $\alpha = 1$, one has $l(T_2) \geq \frac{1}{\lambda^q} l(T_1)$ hence the cut lengths for $f^{-q*}T_1$ are smaller than the ones for T_2 , therefore the definition of $\mathcal{W}_{\text{true}}$ implies that $\mathcal{W}_{\text{true}}^{[T_2]} \subset \mathcal{W}_{\text{true}}^{[f^{-q*}T_1]}$. Proposition 2.4.4 states that the f^q -images of the artificial singularities of T_2 belong to $\mathcal{W}_{\text{true}}^{[T_2]}$. This implies that $f^q(\mathcal{W}^{[T_2]}) \subset \mathcal{W}_{\text{true}}^{[T_2]}$. Hence $f^q(\mathcal{W}^{[T_2]}) \subset \mathcal{W}_{\text{true}}^{[f^{-q*}T_1]}$.

An edge e of Γ_2 with positive length defines a rectangle in $S - (\mathcal{L}^{[T_2]} \cup \mathcal{W}^{[T_2]})$, its length is the length of an unstable segment in the complementary of $\mathcal{W}^{[T_2]}$. According to the result just obtained, it is at least as long as some unstable segment in the complement of $\mathcal{W}^{[f^{-2q*}T_1]}$. The edge e is at least as long as some edge of $f^{-2q*}T_1$. This proves the proposition in the case $\alpha = 1$.

Case $\alpha > 1$. One applies the preceding result to $T'_1 = f^{(\alpha-1)q*}T_1$ and T_2 . \square

Lemma 2.4.9 *Let $T = T_0$ be a super efficient representative for $[f]$. Let T_1, T_2, \dots be the sequence of super efficient representatives obtained from T_0 by applying successive elementary super foldings. The sequence of lengths $(l(T_i))_{i \geq 0}$ is decreasing and tends towards 0.*

Proof :

It is clear that the sequence is decreasing because an elementary super folding decreases the total length of the graph. The amount by which the length decreases is at least the length of an edge, because the elementary super folding is a sequence of foldings and the first folding in the sequence identifies two paths which are at least as long as an edge.

We denote by l_0 the smallest positive length of an edge of $\Gamma^{[T_0]}$. Proposition 2.4.8 implies that whenever $l(T_i) \geq \frac{1}{\lambda^{\alpha q}} l(T_0)$, the elementary super folding applied to T_i will decrease the total length by at least $\frac{1}{\lambda^{(\alpha+1)q}} l_0$. Hence the sequence of lengths $l(T_i)$ cannot be bounded below by a positive number. \square

Lemma 2.4.10 (Cycles) *Let $T = T_0$ be a super efficient representative for $[f]$. Let T_1, T_2, \dots be the sequence of super efficient representatives obtained from T_0 by applying successive elementary super foldings. Then there exists a super efficient representative T_p in this sequence such that $l(T_p) = \frac{1}{\lambda^q} l(T_0)$. Therefore T_p is $f^{-q*}T_0$.*

This lemma states that when one applies successive elementary super foldings to T , one obtains a sequence of super efficient representatives that is a *combinatorial cycle* of super efficient representatives. It means that when one describes this sequence, one eventually obtains $f^{-q*}T_0$, it has the same ordered graph and same combinatorial map as T_0 (hence ‘the same combinatorics’ as T_0), its embedding differs by f^{-q}

Proof :

Let p be the integer such that $l(T_{p-1}) > \frac{1}{\lambda^q}l(T_0) \geq l(T_p)$. We want to show that $l(T_p) = \frac{1}{\lambda^q}l(T_0)$.

Let us assume this is not the case. We denote $l_{p-1} = l(T_{p-1})$, $l_0 = \frac{1}{\lambda^q}l(T_0)$ and $l = \frac{l_{p-1} - l_0}{1 + \frac{1}{\lambda} + \dots + \frac{1}{\lambda^{q-1}}} > 0$. It follows from the uniqueness lemma (lemma 2.2.5) that the representative $f^{-q*}T_0$ is obtained from T_{p-1} by applying the following sequence of foldings : one folds the tangency t_1 with length l , then the tangency t_q with a length $\frac{1}{\lambda}l$, ..., then the tangency t_2 with a length $\frac{1}{\lambda^{q-1}}l$. But l is shorter than the length of the elementary super folding applied to T_1 . This contradicts corollary 2.4.7.

Hence $l(T_p) = \frac{1}{\lambda^q}l(T_0) = l(f^{-q*}T_0)$. Proposition 2.4.3 implies that $T_p = f^{-q*}T_0$. \square

2.4.4 Main result

We now prove the following :

Theorem 2.4.11 *Let f be a pseudo-Anosov homeomorphism of the punctured surface S fixing the puncture x_0 . Let (u_1, \dots, u_m) denote the singular leaves issued from x_0 , let σ be the permutation induced by f on these leaves and let q be the order of σ . Then :*

- i) *There exists a super efficient representative T_0 for $[f]$ relative to the leaf u_1 .*
- ii) *By applying a sequence of elementary super foldings to T_0 , one obtains the same combinatorial representative after identifying a length $(1 - \frac{1}{\lambda^q})l^{[T_0]}(t_1)$ on the leaf u_1 . In other words, there is a combinatorial cycle $C(u_1)$ of super efficient representatives relative to u_1 .*
- iii) *Every super efficient representative relative to u_1 is combinatorially equivalent to some representative in the cycle $C(u_1)$.*
- iv) *If the leaf u_j belongs to the f -orbit of u_1 , then every super efficient representative relative to u_j is combinatorially equivalent to one in the cycle $C(u_1)$.*

We recall here that two super efficient representatives are combinatorially equivalent if they have the same ordered graph Γ and the same map ψ . Two *cycles* of super efficient representatives are *combinatorially equivalent* if the elements of the cycles are combinatorially equivalent.

Note : If there is only one cycle of leaves issued from x_0 (that is, if the permutation σ is transitive) then the combinatorial cycles $C(u_j)$ are all combinatorially equivalent because of iv). In this case, every super efficient representative is combinatorially equivalent to one in the unique cycle.

Proof :

We have already proved parts i) (theorem 2.4.1), and ii) (lemma 2.4.10), we have even showed how to construct a super efficient representative.

To prove part iii), assume that T_0 is a super efficient representative relative to u_1 , the combinatorial cycle can be described as $T_0, T_1, \dots, f^{-q*}T_0$. Let T be another super efficient representative relative to u_1 . We define α to be the integer such that $\lambda^{\alpha q}l(T_0) \geq l(T) > \lambda^{(\alpha-1)q}l(T_0)$. We consider the sequence of super efficient representatives $f^{\alpha q*}T_0, f^{(\alpha-1)q*}T_0, \dots, f^{(\alpha-1)q*}T_0$, it describes also the combinatorial cycle relative to u_1 . Following the proof of lemma 2.4.10, one can check that the super efficient representative T belongs to this sequence.

Let us now prove part iv). Let T_0 be a super efficient representative relative to the leaf u_1 . Let $\mathcal{C}(u_1)$ be the cycle of super efficient representatives obtained from T_0 by applying a sequence of elementary super foldings. Let T be a super efficient representative relative to the leaf u_j . Let k be such that $j = \sigma^k(1)$, then $T' = f^{-k*}T$ is a super efficient representative relative to the leaf u_1 , it is combinatorially equivalent to T . According to part iii), it is also combinatorially equivalent to some representative in the cycle $\mathcal{C}(u_1)$. \square

2.5 Roots and symmetries

2.5.1 Transition maps

Proposition and definition 2.5.1

Let f be a pseudo-Anosov homeomorphism of the surface S with $n+1$ distinguished points $\{x_0, \dots, x_n\}$, fixing x_0 . Let $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$ be the pair of invariant foliations for f . Let q be the order of the permutation σ induced by f on the unstable leaves (u_1, \dots, u_m) issued from x_0 (we assume the labels of the leaves agree with the orientation of the surface).

Let $T = (\Gamma, h_{\Gamma \rightarrow S}, \psi)$ (resp. $T' = (\Gamma', h_{\Gamma' \rightarrow S}, \psi')$) be a super efficient representative for $[f]$ relative to the leaf u_1 (resp. u_j). We assume that T and T' are combinatorially equivalent under a combinatorial map $C : \Gamma \rightarrow \Gamma'$, the map C is then unique.

Moreover there exists a unique homeomorphism g of S preserving \mathcal{F}^s and \mathcal{F}^u that carries (up to isotopy) the embedding of Γ to the embedding of Γ' . In other words one has $g \circ h_{\Gamma \rightarrow S} \cong h_{\Gamma' \rightarrow S} \circ C$. The map g is called the transition map from T to T' . It satisfies the following properties :

- i) $f \circ g = g \circ f$, g shrinks the measured foliation \mathcal{F}^s by a factor called ν , the foliation \mathcal{F}^u is expanded by the same factor ν .
- ii) The map g rotates the unstable leaves issued from x_0 like a rotation of angle $\frac{j-1}{m}2\pi$. We denote by d the order of $j-1$ in \mathbb{Z}/m . There exist two integers b and c , $c \neq 0$, such that $g^{dc} = f^{bq}$.

Note. If the integer b is zero, then the homeomorphism g is finite order. If the integer b is non zero, then the map g is a root of a power of the map f .

Proof :

The combinatorial equivalence is unique because a combinatorial equivalence $C : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ carries the unique tangent turn of order one of T to the unique tangent turn of order

one of T' . The image of the other edges is then uniquely defined because C respects the cyclic ordering at the vertices.

Since T and T' are combinatorially equivalent, and the equivalence respects the cyclic orderings at the vertices, there exists a homeomorphism $\tilde{C} : \mathcal{R}^{[T]} \rightarrow \mathcal{R}^{[T']}$ mapping the rectangle $R(e)$ to the rectangle $R(C(e))$ such that \tilde{C} carries the foliations of $\mathcal{R}^{[T]}$ to the foliations of $\mathcal{R}^{[T']}$. The length of the rectangle $R(e)$ is $l^{[T]}(e)$, the length of the rectangle $R(C(e))$ is $l^{[T']}(C(e))$. The map \tilde{C} can be chosen to expand (or shrink) the unstable foliation by the factor $\frac{l^{[T']}(C(e))}{l^{[T]}(e)} = \frac{l^{[T']}}{l^{[T]}}$. It expands (or shrinks) the stable foliations with some (other) factor. The homeomorphism \tilde{C} defines a homeomorphism $\bar{C} : \bar{\mathcal{R}}^{[T]} \rightarrow \bar{\mathcal{R}}^{[T']}$. The homeomorphism \bar{C} induces an homeomorphism g of S through the diagram

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{R}}^{[T]} & \xrightarrow{\bar{C}} & \bar{\mathcal{R}}^{[T']} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

where the applications $\bar{\mathcal{R}}^{[T]} \rightarrow S$ and $\bar{\mathcal{R}}^{[T']} \rightarrow S$ carry \bar{f}_T and $\bar{f}_{T'}$ to f like in proposition 2.2.2.

It is clear that g satisfies $g \circ h_{T \rightarrow S} \cong h_{T' \rightarrow S} \circ C$ and leaves the foliations of S invariant. The existence is proved.

The uniqueness follows from the fact that the foliations are invariant, and there is a unique homeomorphism fixing a pair of transverse measured foliations with growth rate 1 which is isotopic to the identity, cf [FLP].

Note : If the transition map from T to T' is g then $T' = g^*T$.

The fact that the foliations are left invariant implies that $f \circ g = g \circ f$ because any two homeomorphisms fixing x_0 and preserving up to scale the pair of measured foliations commute.

We select once and for all a measure for \mathcal{F}^s and a measure for \mathcal{F}^u . These measures induce measures on the foliations of the rectangle surfaces $\mathcal{R}^{[T]}$ and $\mathcal{R}^{[T']}$. The map g has an expanding factor ν^s on the stable foliations, and an expanding factor ν^u on the unstable foliations. The homeomorphism g maps S to itself, hence it preserves the total area (defined locally as the product of the stable and unstable measure). This implies that $\nu^u = (\nu^s)^{-1}$, we denote $\nu = \nu^u$. This proves i).

Let $T_{p'}$ be the first representative in the cycle $T = T_0, T_1 \dots T_p = f^{-q*}T_0$ that is combinatorially equivalent to T_0 . Let h be the transition map from T_0 to $T_{p'}$. One observes that $T_{p'+1} = h^*T_1$, and also $T_{p'+i} = h^*T_i$. If $p' < p$, then the combinatorial cycle $C = T_0, T_1 \dots T_p = f^{-q*}T_0$ corresponds to several loops around the combinatorial cycle $T_0, T_1 \dots T_{p'} = h^*T_0$. If $p' < p$ then h is a root of f^{-q} . It comes that there exists an integer $c \geq 1$ ($c = 1$ iff $p' = p$) that satisfies $h^c = f^{-q}$. Moreover, if T'' is any embedded efficient representative relative to u_1 that is combinatorially equivalent to T , then there exists an integer $b \in \mathbb{Z}$ such that $T'' = h^{b*}T$, cf proof of theorem 2.4.11 iii).

The transition map g permutes the unstable leaves at x_0 . It acts like a rotation of angle $2\pi \frac{j-1}{m}$, the order of this rotation is called d . Hence the map g^d has rotation number zero at x_0 . Hence $g^{d*}T_0$ is an embedded efficient representative for f relative to u_1 . It comes that $g^d = h^b$ for the map h defined above and some integer b . Then $g^{dc} = h^{bc} = f^{-bq}$. \square

2.5.2 Solving for roots

Notations and assumptions. Let $S = \bar{S} - \{x_0, \dots, x_n\}$ be a punctured surface. Let f be a pseudo-Anosov homeomorphism of S fixing the distinguished point x_0 . We denote by $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$ the pair of invariant foliations for f , λ is the dilatation factor of f . Let (u_1, \dots, u_m) be the unstable leaves issued from x_0 . They are labelled according to the cyclic ordering induced by the orientation of the surface. Let σ be the permutation on the set $\{1, \dots, m\}$ induced by f on the leaves $\{u_1, \dots, u_m\}$, and q is the order of σ . The permutation σ acts like a rotation of angle $2\pi \frac{p}{m}$ on the set of leaves, where $0 \leq p \leq m-1$. The element $p \in \mathbb{Z}/m$ is the *rotation number* of f at x_0 .

The cycles $\mathcal{C}(u_i)$ and $\mathcal{C}'(u_i)$. If $i \in \{1 \dots m\}$ and T is a super efficient representative of $[f]$ relative to u_i , it follows from theorem 2.4.11 that there is a combinatorial cycle of super efficient representatives of $[f]$ relative to u_i : it is denoted $\mathcal{C}(u_i) : T = T_0, T_1, \dots, T_{p_i} = f^{-q^*} T_0$. If there exists an integer p smaller than p_i such that T_p is combinatorially equivalent to T_0 , let p'_i be the smallest such integer. One says that $\mathcal{C}(u_i)$ admits the *combinatorial subcycle* $\mathcal{C}'(u_i) : T = T_0, T_1, \dots, T_{p'_i}$. In this case, p'_i divides p_i and as above the cycle $\mathcal{C}(u_i)$ corresponds to several loops around the cycle $\mathcal{C}'(u_i)$.

We observe that when there exists an homeomorphism g of S fixing x_0 such that $f = g^k$, then $g \circ f = f \circ g$ and g has the same invariant foliations as f . Furthermore the permutation σ' induced by g on the leaves (u_1, \dots, u_m) is well defined, and $\sigma'^k = \sigma$.

The following results give necessary and sufficient conditions for the map f to admit roots fixing x_0 . We have separated the results in different propositions in order to distinguish different cases, according to the rotation number of f and its roots.

Proposition 2.5.2 *With the above notations and conventions, we assume $q = 1$, which means f has a rotation number zero at x_0 . The following conditions are equivalent :*

- i) *There exists a pseudo-Anosov homeomorphism g fixing x_0 and an integer $k > 1$ such that $f = g^k$ and the rotation number of g at x_0 is zero.*
- ii) *For every leaf u_j issued from x_0 the cycle $\mathcal{C}(u_j)$ admits a subcycle $\mathcal{C}'(u_j)$.*
- iii) *For some leaf u_j , the cycle $\mathcal{C}(u_j)$ admits a subcycle $\mathcal{C}'(u_j)$.*

If the condition iii) is satisfied and $\mathcal{C}'(u_j) : T = T_0, \dots, T_{p'_j}$, then a root of f is the inverse of the transition map from T to $T_{p'_j}$.

Proof :

i) \Rightarrow ii) : If $f = g^k$ then the growth rate of g is $\nu = \lambda^{\frac{1}{k}}$. Let j be an integer in $\{1 \dots m\}$ and let T be a super efficient relative to u_j . The cycle $\mathcal{C}(u_j)$ is described by $T = T_0, T_1, \dots, T_{p_j} = f^{-1^*} T$. Then $T' = g^{-1^*} T$ is a super efficient representative of $[f]$ relative to u_j and its total length is $l(T') = \frac{1}{\nu} l(T)$ by proposition 2.3.2. It follows from proposition 2.4.3 and theorem 2.4.11 iii) that T' is equivalent to T_p for some p , $0 < p < p_j$ since $\nu < \lambda$.

ii) \Rightarrow iii) is obvious.

iii) \Rightarrow i) : We assume that condition iii) is satisfied, and denote by g the transition map from T to $T_{p'_j}$. In the cycle $C(u_j)$ of super efficient representatives $T = T_0, T_1, \dots, T_p = f^{-1}T$ there is a combinatorial subcycle of length p'_j . The cycle $C(u_j)$ is a multiple of the cycle $C'(u_j)$. Hence there is an integer $c > 1$ such that $g^c = f^{-1}$. This proves i). \square

Proposition 2.5.3 *With the above notations and conventions, we assume $q = 1$, that is f has rotation number zero at x_0 . The following conditions are equivalent*

- i) *There exists a pseudo-Anosov homeomorphism g fixing x_0 such that $f = g^k$ and the rotation number of g at x_0 is non zero. Moreover f is not a power of a map with zero rotation number.*
- ii) *For every i , the cycle $C(u_i)$ relative to u_i has no combinatorial subcycle. There exists $j \neq 1$ such that the cycle $C(u_j)$ is combinatorially equivalent to the cycle $C(u_1)$. The transition map g from some $T \in C(u_1)$ to some $T' \in C(u_j)$ is a root of f .*
- iii) *For every i , the cycle $C(u_i)$ relative to u_i has no combinatorial subcycle. There exists $j \neq 1$ such that the cycle $C(u_j)$ of super efficient representatives relative to u_j is combinatorially equivalent to the cycle $C(u_1)$. The transition map h from any $T \in C(u_1)$ to any $T' \in C(u_j)$ that is equivalent to T satisfies $h^u = f^v$ where u is the order of $j - 1$ in \mathbb{Z}/m and u and v are relatively prime.*

Proof :

iii) \Rightarrow ii) : Let u be the order of $j - 1$ in \mathbb{Z}/m . In this condition $u > 1$. If some transition map satisfies $h^u = f^v$ with u and v relatively prime, let x and y be such that $ux + vy = 1$. Let $g = f^x h^y$, then $g^u = f^{xu} h^{yu} = f^{xu} f^{yv} = f$. The map g is a transition map and it is a root of f .

i) \Rightarrow iii) : Let g be a root of f fixing x_0 with non zero rotation number, we assume $f = g^k$. The rotation number of g at x_0 has order k (if it was smaller, then f would have a root with zero rotation number). Let T be a super efficient representative relative to u_1 . Let $u_j = g(u_1)$, then $T' = g^*T$ is super efficient for $[f]$ relative to u_j and the transition map from T to T' is g . All the super efficient representatives for $[f]$ relative to u_j of the form $f^{\alpha}T'$, where α is any integer, are combinatorially equivalent to T . If a representative relative to u_j is combinatorially equivalent to T , it must be of the form $f^{\alpha}T'$, because otherwise the cycle $C(u_j)$ would have a subcycle and therefore, from proposition 2.5.2, there would be a root with zero rotation number. Hence all the representatives of $[f]$ relative to u_j that are equivalent to T are the $f^{\alpha}T' = (f^{\alpha}g)^*T$. All the transition maps from T to the super efficient representatives relative to u_j and equivalent to T are of the form $h = f^{\alpha}g$, and thus $h^k = f^{\alpha k + 1}$. This proves iii).

i) \Rightarrow ii) and ii) \Rightarrow i) These implications are clear. \square

We now deal with the case when f has non-zero rotation number at x_0 .

Proposition 2.5.4 *With the above notations and conventions, we assume $q \neq 1$, that is f has non zero rotation number at x_0 . The following conditions are equivalent*

- i) *There exists a pseudo-Anosov map g fixing x_0 such that $f = g^k$ and the rotation number of g at x_0 has same order q as f .*

ii) For every j , the cycle $C(u_j)$ relative to u_j has a subcycle. Moreover if T is any super efficient relative to u_j , let h be the transition map from T to the first super efficient representative equivalent to T in the subcycle $C'(u_j)$ starting from T . Let $c > 1$ be the integer such that $h^c = f^{-q}$. There exists $1 \leq b < c$ such that the map h^b admits a q -th root fixing x_0 with non zero rotation number that is also a root of f^{-1} .

Proof :

i) \Rightarrow ii) : The map g^q is then a root of f^q and has rotation number zero. Hence if T is a super efficient representative relative to u_j , $g^{-q*}T$ is a super efficient relative to u_j and has total length $l(T) > l(g^{-q*}T) > l(f^{-q*}T)$. The cycle relative to u_j has a subcycle, and the map g^{-q} is a power of the map h , it is of the form h^b with $1 \leq b < c$.

ii) \Rightarrow i) : the q -th root of a map with zero rotation number has a rotation number with order dividing q . But a root of f^{-1} has rotation number with order that is a multiple of q . \square

Proposition 2.5.5 *With the above notations and conventions, we assume $q \neq 1$, that is f has non zero rotation number at x_0 . The following conditions are equivalent*

- i) *There exists a pseudo-Anosov map g fixing x_0 such that $f = g^k$ and the rotation number of g at x_0 has order aq with $a > 1$.*
- ii) *Let $j = \frac{m}{aq}$, the cycle $C(u_{j+1})$ is combinatorially equivalent to $C(u_1)$. Let T be a super efficient relative to u_1 . There exists an integer k relatively prime with aq such that one transition map from T to a representative in the cycle relative to u_{kj+1} is a root of f .*

Proof :

i) \Rightarrow ii) If $a > 1$ is such that aq divides m , let $j = \frac{m}{aq}$. Then $j \in \mathbf{Z}/m$ is a multiple of the rotation number of g , hence there exists $b > 0$ such that g^b has rotation number j . Then $g^{b*}T$ is a super efficient representative relative to u_{j+1} and is combinatorially equivalent to T . This proves the first part of ii). The rotation number of g at x_0 is of the form kj , k prime with aq . Hence $g^{*}T$ is a super efficient representative relative to u_{kj+1} .

ii) \Rightarrow i) It is clear from the previous construction. \square

For the practical determination of a root, it is useful to note the following. We assume that the property ii) of proposition 2.5.5 is satisfied. Let g be the transition map from T to some super efficient representative relative to u_{j+1} ; let h be the transition map from T to the first super efficient representative equivalent to T in the cycle $T = T_0, T_1, \dots, T_p = f^{-q*}T$. There exist integers b and α such that $h^b = f^q$ and $g^a = fh^\alpha$. Any transition map from T to another super efficient representative relative to some u_{kj+1} is of the form $h^u g^v$. The root of f is to be searched among such maps and one can restrict to $1 \leq v \leq aq - 1$. Furthermore the value of u may take only finitely many values according to the growth rate.

2.5.3 Symmetries of pseudo-Anosov homeomorphisms

Let $[f]$ be a pseudo-Anosov class fixing the distinguished point x_0 . Let $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$ be the invariant foliations for f , λ is the dilatation factor of f . Let (u_1, \dots, u_m) be the unstable leaves issued from x_0 . They are labelled according to the cyclic ordering induced by the orientation of the surface. The permutation σ induced by f on the leaves (u_1, \dots, u_m) (or on the set $\{1, \dots, m\}$) has order q .

When there exists a finite order homeomorphism g fixing x_0 such that $f \circ g = g \circ f$, one says that the pair of foliations $(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$ and the homeomorphism f admits the symmetry g . In this case, the foliations are invariant under g , the dilatation factor of g is 1.

In the previous section, we analyzed all the possible cases when a transition map g between two super efficient representatives for $[f]$ is a root of f . This happens when the dilatation factor ν of g is $\nu = \lambda^{1/k}$, and the rotation number of g at x_0 is a k -th root of the rotation number of f . Here, we show that when $\nu = 1$ and the rotation number of g at x_0 is non zero, then f admits the symmetry g .

Proposition 2.5.6 *The following conditions are equivalent*

- i) *There exists a non trivial finite order homeomorphism g fixing x_0 such that $f \circ g = g \circ f$.*
- ii) *For every leaf u_j and every super efficient representative T of $[f]$ relative to u_j , there exists $j' \neq j$ and a super efficient representative T' relative to $u_{j'}$ that is combinatorially equivalent to T and has the same total length.*
- iii) *For some $j \in \{1, \dots, m\}$ and some super efficient representative T relative to u_j , there exists $j' \neq j$ and a super efficient representative T' relative to $u_{j'}$ that is combinatorially equivalent to T and has the same total length.*

If the condition iii) is satisfied, then a finite order homeomorphism commuting with f is given by the transition map from T to T' .

proof : i) \Rightarrow ii) : If g is a finite order map that commutes with f then $T' = g^*T$ is a super efficient representative for f . It has the same total length $l(T') = l(T)$. The homeomorphism g permutes the unstable leaves issued from x_0 in a non trivial fashion (the leaves are not fixed) because otherwise g would be the identity. Hence T' is a super efficient representative of f relative to the leaf $u_{j'} = g(u_j)$, and $j' \neq j$.

ii) \Rightarrow iii) : It is obvious.

iii) \Rightarrow i) : Let g be the transition map from T to T' . Let k be such that $k(j' - j) = 0[m]$. Then $g^{k*}T$ is a super efficient representative relative to u_j and it has the same total length as T . Hence $g^{k*}T = T$ by the uniqueness lemma, that is $g^k = id$. \square

2.6 Practical determination

Let $[f]$ be a pseudo-Anosov class of homeomorphisms of the surface S . It is given for instance by its action on the fundamental group of S ,

$$f_{\#} : \Pi_1(S, x) \rightarrow \Pi_1(S, f(x)).$$

Such a map is described combinatorially in terms of words on a finite alphabet that represent the images of generators of the free group $\Pi_1(S, x)$. Algorithms to compute one efficient representative for $[f]$ are given in [Lo2], [BH1]. The initial data of these algorithms is a representative of f , that is a fibered surface F that carries f . After a finite number of elementary operations one obtains an efficient representative. In fact, the algorithms mentioned also allow to decide if the given class is pseudo-Anosov.

Consider a graph Γ embedded in S through the isotopy class $h_{\Gamma \rightarrow S}$. Let v be a vertex of Γ and let $\{X_1, \dots, X_n\}$ be a set of generators of $\pi_1(S, h_{\Gamma \rightarrow S}(v))$. A *marking* of the graph Γ is a map that associates to each edge e of Γ a word $m(e)$ in the alphabet $\{X_i\} \cup \{\bar{X}_i\}$ such that : for every loop in the graph $b = e_1 \dots e_p$ based at v , the word $m(e_1) \dots m(e_p)$ describes the element $h_{\Gamma \rightarrow S}(b)$ of $\pi_1(S, h_{\Gamma \rightarrow S}(v))$. The embedding of Γ in S is described by a marking of the graph. The marking can be tracked during the operations.

Proof of theorem 2.0.1 We want to use the results of sections 2.5.2 and 2.5.3 in order to decide if $[f]$ admits a root fixing x_0 , or if $[f]$ commutes with a finite order homeomorphism fixing x_0 . For this, we have to find the cycles of super efficient representatives.

First step : finding the cycles of leaves

The initial data is an embedded efficient representative T of $[f]$. One selects a positive eigenvector of the incidence matrix M for the largest eigenvalue λ . This defines lengths for the edges of Γ . One will keep track of the lengths through all the steps, to ensure they define the same measure on S . There is one unstable leaf issued from x_0 associated to every tangency on the boundary of T . The real tangencies are easy to find. The infinitesimal tangencies can be found when computing the gates and the infinitesimal edges of the train track. If a vertex of Γ defines a k -gon with one side missing in the train track, it corresponds to $k - 2$ infinitesimal tangencies. The cyclic ordering induced by the boundary loop b_0 of the graph Γ gives the cyclic ordering of the tangencies, hence of the unstable leaves. The permutation induced by ψ on the tangencies gives the permutation σ induced by f on the unstable leaves issued from the x_0 . We shall use the same notation for orbits of tangencies and orbits of leaves, this is possible because leaves and tangencies are in one-to-one correspondence.

Second step : finding one super efficient representative.

Let T be an efficient representative for $[f]$. One can construct a good representative T' for $[f]$, following the proof of proposition 2.2.3. Let us now explain how to obtain some super efficient representative T_0 . Let \mathcal{O} be an orbit of real tangencies. One applies the glueing operation to the other cycles of real tangencies, if any. Then one folds the real tangencies of the orbit \mathcal{O} in the appropriate order so that eventually one of them is of order one and located at an inner vertex, like in the proof of the proposition 2.4.1. One has then constructed a super efficient representative T' relative to some leaf that is in the orbit \mathcal{O} .

Step 3 : finding all super efficient representatives

Let $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_r$ be the orbits of singular unstable leaves issued from x_0 . We know, according to theorem 2.4.11, that the super efficient representatives for f belong to combinatorial cycles $\mathcal{C}(\mathcal{O}_1), \dots, \mathcal{C}(\mathcal{O}_r)$ associated to the orbits of leaves. Let T_i^0 be a super efficient representative relative to a tangency in the orbit \mathcal{O}_i . The combinatorial cycle $\mathcal{C}(\mathcal{O}_i)$ is the set of representatives obtained when applying successive elementary super

foldings to T_i^0 . The cycle has been completed when the lengths of the foldings that have been performed sum up to $(1 - \frac{1}{\lambda^q})l(T_i^0)$, where q is the order of the permutation σ .

If $\mathcal{O}_j \neq \mathcal{O}_i$, one can find the cycle $\mathcal{C}(\mathcal{O}_j)$ of super efficient representatives associated to \mathcal{O}_j as follows. One starts with T_i^0 . The first step is to find some efficient representative T' for which the tangencies associated to leaves in the orbit \mathcal{O}_j are real. One applies the unglueing operation to the orbit \mathcal{O}_j of infinitesimal tangencies. There are now two cycles of real tangencies, namely the real tangencies in the orbits \mathcal{O}_i and \mathcal{O}_j . One applies the glueing operation to the cycle \mathcal{O}_i . This leads to a representative whose real tangencies are in the orbit \mathcal{O}_j . One constructs then a super efficient representative relative to some leaf $u \in \mathcal{O}_j$, like in the step 2. The cycle $\mathcal{C}(\mathcal{O}_j)$ is obtained when applying successive elementary super foldings.

Note that when the total length of the representative T_i^0 is given, the lengths of the representatives in the cycles $\mathcal{C}(\mathcal{O}_j)$ can be computed.

Step 4 : analyzing the cycles

Once one has computed the cycles of super efficient representatives together with their total length, one can check if these cycles have combinatorial subcycles. Then one applies the results of section 2.5.2 for finding roots, and of section 2.5.3 for finding symmetries. More precisely

- roots

case $q = 1$: If some cycle $\mathcal{C}(\mathcal{O}_i)$ has a combinatorial subcycle, then f admits a root fixing x_0 , cf proposition 2.5.2 where we stated a precise necessary and sufficient condition.

If no cycle has a subcycle, but two cycles $\mathcal{C}(\mathcal{O}_j)$ and $\mathcal{C}(\mathcal{O}_{j'})$ are combinatorially equivalent, let g be the transition map from some representative T relative to u_j to a representative T' relative to $u_{j'}$ that is combinatorially equivalent to T . The growth rate ν of g is the quotient $\frac{l(T)}{l(T')}$ of the total lengths. If x is the order of $j' - j$ in \mathbb{Z}/m , there exists an integer y such that $g^x = f^y$. The integer y can be computed once one knows the growth rates of g and f , since $\nu^x = \lambda^y$. We note that a numerical approximation of these growth rates is sufficient for finding y . If x and y are relatively prime then f admits a root (cf proposition 2.5.3).

case $q \neq 1$: We refer the reader to propositions 2.5.4 and 2.5.5 for precise statements.

- symmetries

We refer the reader to proposition 2.5.6 for a necessary and sufficient condition.

2.7 The conjugacy problem, connectedness of the set of efficient representatives.

Our main result (theorem 2.4.11) yields another solution to the conjugacy problem among pseudo-Anosov elements of the mapping class group, cf [Mo],[He],[Lo2]. A *combinatorial good representative of $[f]$* is a pair (Γ, ψ) associated to some good representative of $[f]$, 'combinatorial' means that one does not keep track of the embeddings. Note that however the cyclic orderings at the vertices are known because Γ is an ordered graph. Let $CG(f)$ be the set of combinatorial good representatives of $[f]$. One says that two

combinatorial good representatives for $[f]$ are *connected* whenever there is a sequence of foldings, glueings or the converse operations that transforms one of them into the other.

Proposition 2.7.1 *Let $[f]$ be a pseudo-Anosov element of $MCG(S)$ fixing x_0 . Let $CG(f)$ be the set of combinatorial good representatives of $[f]$.*

i) $CG(f)$ is a complete conjugacy invariant.

ii) $CG(f)$ is connected.

Proof :

i) The fact that $CG(f) = CG(g)$ if f and g are conjugate follows from proposition 2.3.2. This proves that $CG(f)$ is a conjugacy invariant. It is a complete conjugacy invariant because if $CG(f) = CG(g)$ then f and g are conjugated. The proof is the same as the proof of proposition 2.5.1.

ii) To prove that the set $CG(f)$ is connected we apply the arguments of the proof of proposition 2.4.1. More precisely, one considers two embedded good representatives T and T' . Following the proof of proposition 2.4.1, one can see that T is connected to a super efficient representative T_0 after a finite number of glueings followed by a finite number of foldings. Similarly, T' is connected to a super efficient representative T'_0 within a finite number of glueings followed by a finite number of foldings. The two super efficient representatives T_0 and T'_0 are connected : either they belong to the same combinatorial cycle C_i , in this case they are connected by a finite number of foldings, or they belong to different cycles C_i and C_j , in this case they are connected by an unglueing operation followed by a glueing operation followed maybe by foldings. It is then clear that the set $CG(f)$ is connected. \square

Note : Our operations of folding and glueing can be expressed in terms of ‘classical’ folding operations, the ones defined in [BH1] or [Lo1]. This gives another proof of the fact that the set of efficient representatives is connected with respect to the classical folding operations. The connectedness result of proposition 2.7.1 is a stronger statement than the corresponding theorem about free groups automorphisms in [Lo2]. Indeed here the elements are connected through efficient representatives on the same surface.

In order to check whether two pseudo-Anosov mapping classes $[f]$ and $[g]$ are conjugated, one has to compute the two finite sets $CG(f)$ and $CG(g)$. These sets are difficult to compute in practice. The following proposition states that the set of combinatorial super efficient representatives $CSE(f)$ is also a complete conjugacy invariant.

Proposition 2.7.2 *The set $CSE(f)$ of combinatorial super efficient representatives is a complete conjugacy invariant.*

Moreover, $CSE(f)$ is the union of the cycles C_1, \dots, C_r given by theorem 2.4.11. These cycles are explicitly computable.

Proof : The fact that $CSE(f)$ is a complete conjugacy invariant follows the same proof as part i) of the previous proposition. An algorithm to compute the cycles C_1, \dots, C_r has been given in the previous section. \square

The set $CSE(f)$ has much less elements than the set $CG(f)$. Moreover, one knows an explicit way to find all the super efficient representatives, cf section 2.6. The set $CSE(f)$

can be computed rather easily. An algorithm to solve the conjugacy problem among pseudo-Anosov homeomorphisms is the following. Let f and g be two pseudo-Anosov classes. One computes the sets $CSE(f)$ and $CSE(g)$. One checks then whether these sets are equal or not. One observes that if they are not disjoint, they are equal.

2.8 Examples

In this section we give several examples of applications of our results. We show how to find explicitly the cycles $\mathcal{C}(u_i)$ for a pseudo-Anosov homeomorphism. In order to simplify the exposition, we have restricted our examples to homeomorphisms of the punctured disk.

2.8.1 Cycle for a pseudo-Anosov braid

There exists a group morphism from the group of n -strings braids to the mapping class group of the $n + 1$ -punctured sphere. It is surjective and its kernel is the center of the braid group, cf [Bi]. The center of the braid group B_n is the cyclic group generated by the element $\Delta_n = (\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})^n$. Hence a n -string braid induces a mapping class of the $n + 1$ -punctured sphere, or a mapping class of the n -punctured disk. The boundary of the disk corresponds to a fixed puncture x_0 of the sphere.

Let $\beta = \sigma_1 \bar{\sigma}_2$ be the 3-string braid shown on figure 2.16a. It induces a pseudo-Anosov mapping class of the 3-punctured disk, hence a pseudo-Anosov mapping class $[f_\beta]$ of the 4-punctured sphere. Let x_0 be the puncture corresponding to the boundary of the disk. It is fixed under $[f_\beta]$. We want to compute the combinatorial cycle of super efficient representatives for $[f_\beta]$.

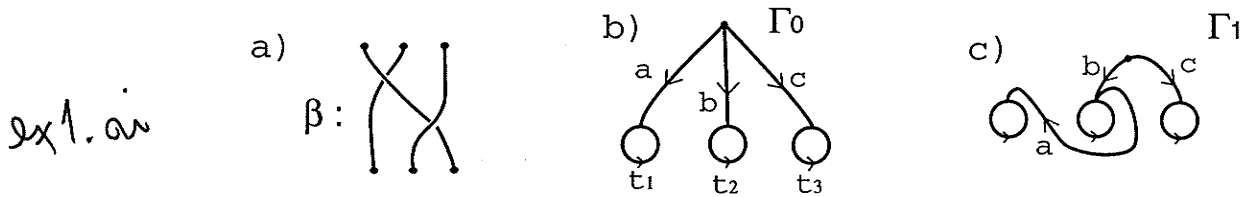


Figure 2.16: The braid β , the initial graph and the first step.

Initial representative. Using techniques of [Lo1] or [BH1], one can find an efficient representative for $[f_\beta]$. The graph is the embedded graph Γ_0 shown on fig.2.16b. The combinatorial map ψ_0 is :

$$\begin{aligned} \psi_0 : \quad a &\mapsto at_1 \bar{a}c \\ b &\mapsto a \\ c &\mapsto ct_3 \bar{c}b \\ t_1 &\mapsto t_3 \\ t_2 &\mapsto t_1 \\ t_3 &\mapsto t_2 \end{aligned}$$

The incidence matrix is a 6×6 matrix. It has a Perron-Frobenius block of size 3 that corresponds to the edges a, b, c . This block is

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

The largest eigenvalue of this matrix is the dilatation factor for $[f_\beta]$. Its value is $\lambda = 2.618\dots$. One can assign to the edges of Γ_0 the lengths $l_0(a) = 0.809\dots, l_0(b) = 0.309\dots, l_0(c) = 0.5$ that are the coordinates of an eigenvector of the above matrix. The peripheral edges t_i have length zero.

This initial representative is a super efficient representative, because the real tangency is located at an inner vertex of the graph (it is the unique fixed point of the boundary). One observes that there is no infinitesimal tangency on the boundary.

Let us now describe the sequence of elementary super foldings. We shall not recall the action on the edges t_i because these edges will always be permuted with the same permutation. We also give the lengths of the edges, obtained from the initial lengths.

First step. We fold the beginning of a with bt_2 . The new graph Γ_1 and its embedding are shown on fig.2.16c. The new map is :

$$\begin{aligned} \psi_1 : \quad a &\longmapsto \overline{at_2}bc \\ b &\longmapsto bt_2a \\ c &\longmapsto \overline{ct_3}cb \end{aligned}$$

The lengths are $l(a) = 0.5, l(b) = 0.309\dots, l(c) = 0.5$.

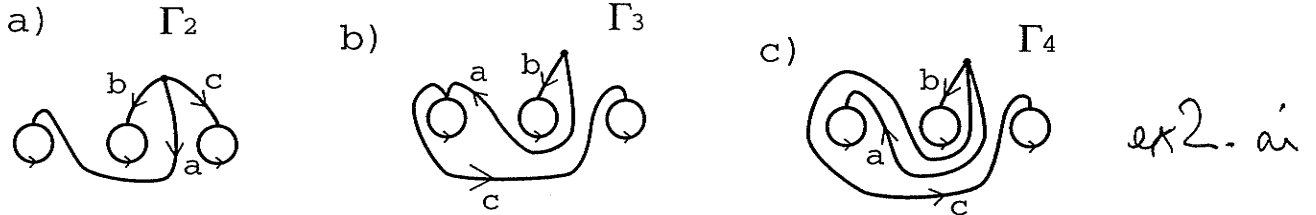


Figure 2.17: Steps 2, 3 and 4.

Second step. We fold the beginning of a with \bar{b} . The new graph Γ_2 and its embedding are shown on fig.2.17a. The map is

$$\begin{aligned} \psi_2 : \quad a &\longmapsto c \\ b &\longmapsto bt_2\bar{b}a \\ c &\longmapsto \overline{ct_3}cb \end{aligned}$$

The lengths are $l(a) = 0.190\dots, l(b) = 0.309\dots, l(c) = 0.5$.

This embedded representative looks like the initial one, because the combinatorial maps are the same up to relabelling. But one can not identify the representatives, because the combinatorial map that transforms the initial representative into the representative of step 2 does not respect the cyclic ordering at the vertex. Hence the representatives on the graphs Γ_0 and Γ_2 are not combinatorially equivalent (in the sense of ordered graphs).

Step 3. We fold the beginning of c with $a\bar{t}_1$. The new graph Γ_3 is shown on fig.2.17b. The map is

$$\begin{aligned}\psi_3 : \quad a &\longmapsto a\bar{t}_1c \\ b &\longmapsto bt_2\bar{b}a \\ c &\longmapsto \bar{c}t_1\bar{a}b\end{aligned}$$

The lengths are $l(a) = 0.190\dots, l(b) = 0.309\dots, l(c) = 0.309\dots$

Step 4. We fold the beginning of c with \bar{a} . The new graph Γ_4 is on fig.2.17c. The map ψ_4 is

$$\begin{aligned}\psi_4 : \quad a &\longmapsto a\bar{t}_1\bar{a}c \\ b &\longmapsto bt_2\bar{b}a \\ c &\longmapsto b\end{aligned}$$

The lengths are $l_4(a) = 0.190\dots, l_4(b) = 0.309\dots, l_4(c) = 0.118\dots$

This representative is combinatorially equivalent to the initial one, where the equivalence is given by the following map $C : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_4$:

$$\begin{aligned}C : \quad a &\longmapsto b \\ b &\longmapsto c \\ c &\longmapsto a \\ t_1 &\longmapsto t_2 \\ t_2 &\longmapsto t_3 \\ t_3 &\longmapsto t_1\end{aligned}$$

The map C respects the cyclic orderings at the vertices induced by the embeddings. Hence it is an isomorphism of ordered graphs. It is clear that $\psi_4 \circ C = C \circ \psi_0$. Moreover, the lengths are shrunked by a factor $\lambda = 2.618\dots$: for every edge e , one has $l_4(C(e)) = \frac{1}{\lambda}l_0(e)$. We note that $h_{\Gamma_4 \rightarrow S} \circ C = f_\beta h_{\Gamma_0 \rightarrow S}$, hence $T_4 = f_\beta^{-1*}T_0$.

This illustrates part ii) of theorem 2.4.11, about the existence of combinatorial cycles. Observe that in this case there is no combinatorial subcycle. In this case $q = 1$ because there is only one tangency ; then proposition 2.5.2 implies that f has no root fixing ∂D with a zero rotation number. Therefore f has no proper root.

2.8.2 Root of a pseudo-Anosov homeomorphism

In the second example, we shall reconstruct explicitly a transition map. It is a root of the given homeomorphism.

Consider the 4-string braid $\alpha = \bar{\sigma}_2\sigma_1\bar{\sigma}_2\sigma_1\bar{\sigma}_2\sigma_3$. It induces an element of the mapping class group of the 5-punctured sphere. Let us compute the cycle of super efficient representatives for $[f_\alpha]$.

Initial representative. Using techniques of [Lo1], [BH1] we find an efficient representative for $[f_\alpha]$. The embedded graph Γ_0 is shown on fig 2.18b. The marking (cf part 2.6) is given by $m(a) = \emptyset; m(b) = X_2; m(c) = \emptyset; m(d) = \emptyset; m(t_i) = X_i$ for $1 \leq i \leq 4$. The

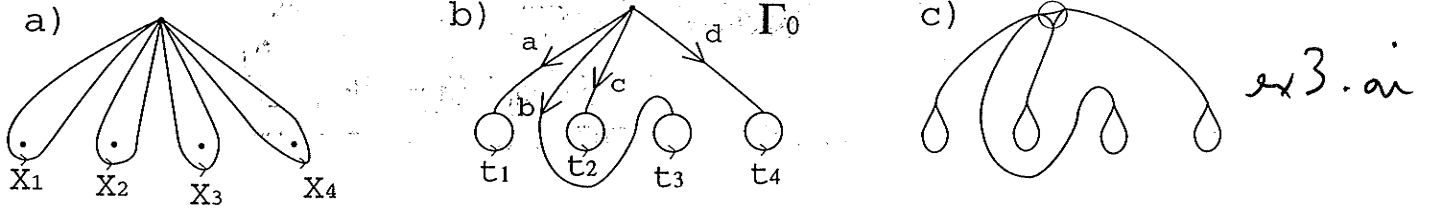


Figure 2.18: Generators of the π_1 ; initial graph ; initial train track.

combinatorial map is given by

$$\begin{aligned} \psi_0 : \quad a &\mapsto ct_2\bar{c}dt_4\bar{d}at_1\bar{a}dt_4\bar{d}at_1\bar{a}dt_4\bar{d}c \\ b &\mapsto ct_2\bar{c}dt_4\bar{d}at_1\bar{a}d \\ c &\mapsto dt_4\bar{d}a \\ d &\mapsto b \\ t_1 &\mapsto t_2 \\ t_2 &\mapsto t_1 \\ t_3 &\mapsto t_4 \\ t_4 &\mapsto t_3 \end{aligned}$$

We compute the eigenvalues and eigenvectors of the incidence matrix, and find $\lambda = 5.27451\dots$, and the lengths associated to the edges are $l(a) = 0.66668\dots$; $l(b) = 0.34769\dots$; $l(c) = 0.15139\dots$; $l(d) = 0.06591\dots$. These computations have been done using a computer. But we had observed that a mere numerical approximation of these quantities is sufficient to our purposes.

One can construct the train track that is associated to this representative, cf fig.2.18c. The unique real tangency is located at an inner vertex, hence this efficient representative is a super efficient representative. There is no infinitesimal tangency on the boundary.

First step. We fold the beginning of a with bt_3 .

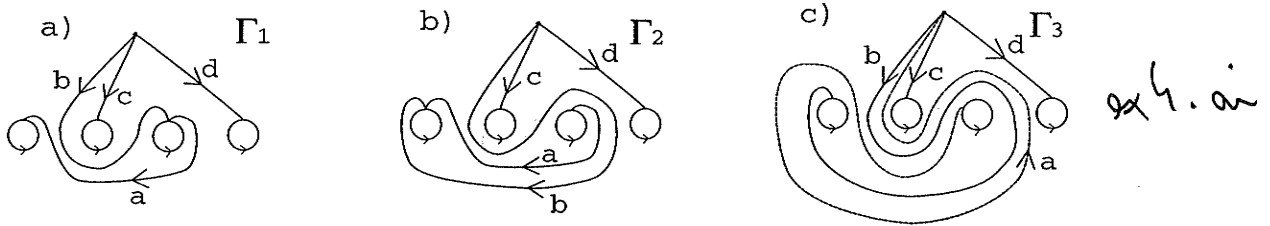


Figure 2.19: Steps 1, 2 and 3.

The new graph Γ_1 is shown on fig.2.19a. The new marking is $m(a) = \overline{X_3X_2}$; $m(b) = X_2$ (we do not recall the marking of the loops t_i , neither of the edges with empty marking). The new map is

$$\begin{aligned} \psi_1 : \quad a &\mapsto \bar{d}bt_3at_1\bar{a}t_3\bar{b}dt_4\bar{d}c \\ b &\mapsto ct_2\bar{c}dt_4\bar{d}bt_3at_1\bar{a}t_3\bar{b}d \\ c &\mapsto dt_4\bar{d}bt_3a \\ d &\mapsto b \end{aligned}$$

The lengths associated to the edges are $l(a) = 0.31898..$; $l(b) = 0.34769..$; $l(c) = 0.15139..$; $l(d) = 0.06591..$

Step 2. We fold the beginning of \bar{b} with $a\bar{t}_1$.

The graph Γ_2 is shown on fig.2.19b. The marking is $m(a) = \overline{X_3 X_2}$; $m(b) = X_2 \overline{X_3 X_2 X_1}$. The map is

$$\begin{aligned}\psi_2 : \quad a &\longmapsto \bar{d}bt_1\bar{a}t_3\bar{a}t_1\bar{a}t_3\bar{a}t_1\bar{b}dt_4\bar{d}c \\ b &\longmapsto c \\ c &\longmapsto dt_4\bar{d}bt_1\bar{a}t_3a \\ d &\longmapsto bt_1\bar{a}\end{aligned}$$

The lengths associated to the edges are $l(a) = 0.31898..$; $l(b) = 0.02870..$; $l(c) = 0.15139..$; $l(d) = 0.06591..$

Step 3. We fold the beginning of \bar{a} with \bar{b} .

The graph Γ_3 is shown on fig.2.19c. The marking is $m(a) = \overline{X_3 X_2 X_1 X_2 X_3 X_2}$; $m(b) = X_2 \overline{X_3 X_2 X_1}$. The map is

$$\begin{aligned}\psi_3 : \quad a &\longmapsto \bar{d}bt_1\bar{b}at_3abt_1\bar{b}at_3abt_1\bar{b}dt_4\bar{d} \\ b &\longmapsto c \\ c &\longmapsto dt_4\bar{d}bt_1\bar{b}at_3ab \\ d &\longmapsto bt_1\bar{b}\bar{a}\end{aligned}$$

The lengths associated to the edges are $l(a) = 0.31898..$; $l(b) = 0.02870..$; $l(c) = 0.15139..$; $l(d) = 0.06591..$

At this stage, one notes that this representative is combinatorially equivalent to the initial one under the equivalence map $C : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_3$ defined by :

$$\begin{aligned}C : \quad a &\longmapsto \bar{a} \\ b &\longmapsto c \\ c &\longmapsto d \\ d &\longmapsto b \\ t_1 &\longmapsto t_3 \\ t_2 &\longmapsto t_4 \\ t_3 &\longmapsto t_2 \\ t_4 &\longmapsto t_1\end{aligned}$$

This map respects this cyclic ordering at the vertices, and it satisfies $\psi_3 \circ C = C \circ \psi_0$. The combinatorial map C is induced by a homeomorphism h of the 4-punctured disk. The homeomorphism h is the transition map between the initial representative Γ_0 and the representative Γ_3 . We know from theorem 2.4.11 and proposition 2.5.2 that h is pseudo-Anosov, because its growth rate is greater than one. It is either f_α^{-1} or a root of f_α^{-1} . One can compute its growth rate with the length of the edges, it is $\nu = \frac{l(e)}{l(C(e))}$ for any edge e . One finds : $\nu = 2.296...$ that is $\nu = \sqrt{\lambda}$. We know then that the homeomorphism h that induces the combinatorial map C is a square root of f_α^{-1} .

In order to compute the action of the homeomorphism h on the fundamental group, one needs to find the images of a set of generators. We choose the set of generators given by the paths $\{at_1\bar{a}; bt_3\bar{b}; ct_2\bar{c}; dt_4\bar{d}\}$. The map h sends the markings of these paths to the

corresponding markings for the graph Γ_3 . The action induced by h on the fundamental group is :

$$h_{\#} : \begin{array}{ll} X_1 & \mapsto X_2 \overline{X_3 X_2 X_1} X_2 X_3 \overline{X_2 X_1 X_2 X_3 X_2} \\ X_2 & \mapsto X_4 \\ X_2 X_3 \overline{X_2} & \mapsto X_2 \\ X_4 & \mapsto X_2 \overline{X_3 X_2 X_1} X_2 X_3 \overline{X_2} \end{array}$$

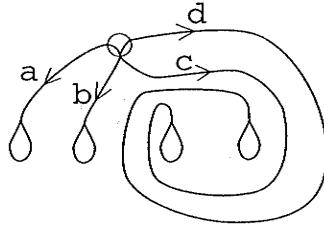
One checks that it is a surface automorphism : the boundary curve that is described by the word $X_1 X_2 X_3 X_4$ is invariant.

Lengthy, but straightforward, calculations show that the homeomorphism h is induced by the braid $\beta = \overline{\sigma_2} \sigma_3 \sigma_2 \overline{\sigma_1} \sigma_2$. We know, according to the results of the present paper, that $h^2 = f_{\alpha}^{-1}$. It is an easy computation to check that $\beta^2 = \alpha^{-1}$. We have found a root of the braid α .

2.8.3 A pseudo-Anosov homeomorphism admitting a symmetry

We consider the braid $\beta \in B_4$ defined by $\beta = \sigma_3 \overline{\sigma_2} \sigma_1$, it induces a pseudo-Anosov class of homeomorphisms of D_4 , cf [Lo1]. One computes an efficient representative for $[f_{\beta}]$ and finds that there are two tangencies on the boundary, which are fixed under $[f_{\beta}]$. Hence we know that there should be two cycles of super efficient representatives, one corresponding to each tangency. We glue one of these tangencies and obtain a super efficient representative T_0 , see figure 2.20 for the train track associated to T_0 . The map ψ_0 is :

$$\begin{array}{ll} \psi_0 : a & \mapsto at_1 \overline{ab} \\ b & \mapsto ct_3 \overline{cd} t_4 \overline{dc} \\ c & \mapsto ct_3 \overline{cd} \\ d & \mapsto dt_4 \overline{dc} t_3 \overline{ca} \end{array}$$



ex 5. a

Figure 2.20: The train track associated to T_0 .

One computes the cycle of super efficient representatives relative to this tangency. The transition map from T_0 to the first super efficient representative equivalent to T_0 has growth rate 3.732.. which is equal to the growth rate of ψ_0 . Hence this cycle has no subcycle. This ensures, by proposition 2.5.2 that $[f_{\beta}]$ has no root fixing x_0 with rotation number zero at x_0 . Then one computes the cycle associated to the other tangency, and finds that it is combinatorially equivalent to the first one. A transition map g has growth rate 1. This implies that g is a symmetry for f_{β} , and f_{β} has no root.

One finds that g is induced by the braid $\alpha = \sigma_3^2 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2$. One can then check algebraically that $\alpha\beta = \beta\alpha$; and moreover $\alpha^2 = \Delta_4$, the map g is finite order of order 2.



Chapitre 3

Une minoration de l'entropie topologique des difféomorphismes du disque

Introduction

Entropie. Soit X un espace compact et $T : X \rightarrow X$ une application continue. Adler, Konheim et McAndrew ont défini en 1965 [AKM] ce qu'est l'*entropie topologique* de l'application T . C'est un réel positif ou nul, noté $h(T)$, qui mesure le désordre, le mélange apporté par itération de T . En 1976, Bowen et Franks [BF] ont montré que si f est une application continue de l'intervalle dans lui-même ayant une orbite périodique de période n et si n n'est pas une puissance de 2, l'entropie topologique de f est minorée par $1/n \log 2$.

Entropie d'un homéomorphisme par rapport à une orbite périodique. Soit S une surface orientée. On appelle $\text{Difféo}^+(S)$ le groupe des difféomorphismes de S qui préservent l'orientation. Si f est un homéomorphisme d'une surface S et \mathcal{O} une orbite périodique de f , l'*entropie de f par rapport à \mathcal{O}* est par définition la borne inférieure de l'entropie topologique des homéomorphismes isotopes à f relativement à \mathcal{O} .

Dans la suite on se limitera au cas où $S = D^2$ est le disque fermé. Etant donné un homéomorphisme f du disque et une orbite périodique \mathcal{O} pour f , nous cherchons à minorer l'entropie de f par rapport à \mathcal{O} . Les orbites d'entropie nulle sont maintenant bien comprises (voir par exemple [GST] et [LM]), et pour une période donnée sont en nombre fini. Nous étudions ici le cas où f est un difféomorphisme du disque et \mathcal{O} une orbite de f qui n'est pas d'entropie nulle. Nous prouvons le :

Théorème 3.0.1 *Soit $f \in \text{Difféo}^+(D^2)$ ayant une orbite périodique \mathcal{O} , de période $n \geq 3$, qui n'est pas d'entropie nulle. Alors*

$$h(f) \geq \log(1 + \sqrt{2}).$$

Thurston a démontré [Th] que toute classe d'isotopie de $\text{Difféo}^+(S)$ contient un difféomorphisme de l'un des trois types suivants : *ordre fini, réductible, pseudo-Anosov*

(voir [FLP] pour plus de précisions). On dit par extension que la classe d'isotopie est d'ordre fini [resp. réductible, resp. pseudo-Anosov].

Le théorème 3.0.1 est une conséquence du

Théorème 3.0.2 *Soit $f \in \text{Diff}^+(D^2)$ ayant une orbite périodique \mathcal{O} de période $n \geq 4$. On suppose de plus que la classe d'isotopie $[f|_{D^2-\mathcal{O}}]$ est pseudo-Anosov. Alors*

$$h(f) \geq \log(x_n),$$

où x_n est la plus grande racine du polynôme $P_n(x) = x^{2n-3} - x^n - x^{n-3} - 1$, et vérifie : $x_n \geq \frac{1}{n}(1 + \sqrt{2})^{\frac{1}{n}}$.

La stratégie pour montrer ce théorème est la suivante. Si f est un homéomorphisme pseudo-Anosov d'une surface S , alors l'entropie de f est égale au logarithme de son facteur de dilatation : $h(f) = \ln \lambda$, cf [FLP, exposé 10]. Or le facteur de dilatation de f est le rayon spectral de la matrice d'incidence de n'importe quel représentant efficace. Ceci permet donc de calculer facilement l'entropie d'un homéomorphisme pseudo-Anosov si on en connaît un représentant efficace. Un deuxième résultat de [FLP, exposé 10] est que si f est pseudo-Anosov, alors l'entropie de f est minimale dans sa classe d'isotopie. Autrement dit, pour tout homéomorphisme g isotope à f , on a $h(g) \geq h(f)$.

Dans le cas où f est un difféomorphisme pseudo-Anosov du disque et \mathcal{O} possède au moins trois points, des considérations combinatoires et topologiques permettent de trouver une dynamique 'minimale' pour la partition de Markov en rectangles (lemme 3.4.3). Un résultat de Block, Guckenheimer, Misiurewicz et Young [BGM] permet de calculer l'entropie de cette dynamique minimale, c'est le logarithme de la plus grande racine du polynôme $x^{2n-3} - x^n - x^{n-3} - 1$.

Remarque : Dans le cas $n = 3$, Matsuoka [Mat] a exhibé le pseudo-Anosov de plus petite entropie. Son entropie est égale à

$$\log \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ces résultats sont à rapprocher de ceux de Los [Lo4], et de Franks et Misiurewicz [FM] qui ont établi un résultat analogue à celui du théorème 3.0.1, avec la minoration $1/n \log 2$. Dans le cadre plus général des applications transitives sur les arbres à n extrémités, Alsedà, Baldwin, Llibre et Misiurewicz [ABLM] obtiennent aussi la minoration $1/n \log 2$.

Par ailleurs, dans le cas des surfaces F_g^s de genre g et ayant s trous, Penner définit le spectre de F_g^s par :

$$\Sigma_g^s = \{h(f) | f \text{ est un difféomorphisme pseudo-Anosov de } F_g^s\}.$$

Posons $l_g^s = \min(\Sigma_g^s)$. L'inégalité suivante :

$$l_g^s \geq \frac{\log 2}{12g - 12 + 4s}$$

est démontrée dans [Pe2]. Elle implique que l'entropie de tout difféomorphisme de la sphère privée de $n + 1$ points est minorée par

$$\frac{1}{4n - 8} \log 2$$

En exhibant des exemples (voir [Pe2] et [Ba]) on peut également obtenir une majoration de ce nombre l_g^s .

3.1 Propriétés de l'entropie topologique

Dans cette section nous rappelons quelques propriétés de l'entropie topologique que nous utilisons dans la suite. Les résultats suivants sont classiques.

Propriété 3.1.1

i) Soit X un espace compact et $f : X \rightarrow X$ continue. Alors

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad h(f^n) = |n|h(f).$$

ii) Si $X = Y \cup Z$ est une partition de X en deux parties invariantes par f alors

$$h_X(f) = \max(h_Y(f|_Y), h_Z(f|_Z)).$$

iii) Soit f un difféomorphisme pseudo-Anosov d'une surface S . Alors

$$h(f) = \inf_{g \in [f]} h(g).$$

On pourra se reporter à [AKM] pour i) et ii), et à [FLP, exposé 10] pour iii).

On considère une classe d'isotopie de $\text{Difféo}^+(S)$ qui est réductible. Alors, d'après [FLP, exposé 10], il existe un représentant f_0 de cette classe tel que :

il existe une famille finie (S_i) de sous-surfaces de S , de caractéristique d'Euler négative, pas forcément connexes, d'intérieurs deux à deux disjoints vérifiant

(i) $S = \bigcup_i S_i$,

(ii) chaque S_i est f_0 -invariant,

(iii) S_i est formé de q_i composantes connexes $S_i^1, \dots, S_i^{q_i}$ qui sont permutées cycliquement par f_0 ,

(iv) pour tout i , les difféomorphismes $\{f_0^{q_i}|_{S_i^j}\}_{1 \leq j \leq q_i}$ sont soit pseudo-Anosov, soit d'ordre fini.

On dit qu'un difféomorphisme qui vérifie ces propriétés est *canonique*.

Lemme 3.1.2 *Soit f un difféomorphisme réductible canonique de S . Alors*

$$h(f) = \inf_{g \in [f]} h(g).$$

Ce lemme permet de caractériser les classes d'isotopie ayant un représentant d'entropie nulle : ce sont

- a) les classes d'ordre fini,
- b) les classes réductibles, dont toutes les 'composantes' d'un représentant canonique sont d'ordre fini.

3.2 Graphes-squelettes

Dans ce qui suit, on se restreindra au cas où la surface S est le disque D^2 .

Nous expliquons dans cette partie comment le calcul de l'entropie se ramène à un calcul explicite de rayon spectral (théorème 3.2.2).

Soit \mathcal{O} une partie finie de D^2 de cardinal n .

Définition Un *graphe-squelette par rapport à \mathcal{O}* est un arbre fini Γ plongé dans le disque, dont les extrémités sont les points de \mathcal{O} . On supposera de plus que les sommets de Γ dans $D^2 - \mathcal{O}$ sont de valence au moins 3.

Soit Γ un graphe-squelette par rapport à \mathcal{O} . Les sommets de Γ sont de deux types : les sommets *terminaux* (i.e. de valence 1), qui sont les points de \mathcal{O} , et les sommets *internes*, c'est-à-dire ceux auxquels aboutissent au moins trois arêtes.

Soit I l'ensemble des arêtes de Γ . Nous appellerons *arêtes terminales* les arêtes dont une extrémité est un sommet terminal, et *arêtes internes* les autres. On notera S_t l'ensemble des arêtes terminales, et S_m l'ensemble des arêtes internes.

Le nombre d'arêtes terminales est n , puisque chacune d'entre elles n'est reliée qu'à un seul sommet terminal (si $n \geq 3$). Le nombre d'arêtes internes est plus petit que $n - 3$ (cette valeur étant atteinte pour un graphe dont tous les sommets internes sont trivalents).

Si Γ est un graphe-squelette on définit un graphe dual Γ^* vérifiant les propriétés suivantes (cf figure 3.1):

- Les sommets de Γ^* sont les sommets de Γ ainsi que certains points de ∂D^2 .
- Toute branche de Γ^* est un arc joignant un sommet (interne ou terminal) de Γ à la frontière du disque ∂D^2 .
- Les branches de Γ^* ne s'intersectent pas et sont choisies de sorte que chaque composante connexe de $D^2 - \Gamma^*$ contienne exactement une arête de Γ . On note R_i la composante de $D^2 - \Gamma^*$ qui contient l'arête i de Γ .
- Si i et j sont deux arêtes distinctes de Γ , $\overline{R_i} \cap \overline{R_j}$ est soit vide, soit est formé d'un sommet de Γ , soit est formé d'une arête de Γ^* .
- Il existe une rétraction $D^2 \rightarrow \Gamma$, qui envoie $\overline{R_i}$ sur i , et si γ est une arête de Γ^* dont le sommet à l'intérieur de D^2 est noté v , alors l'image par la rétraction de γ est $\{v\}$.

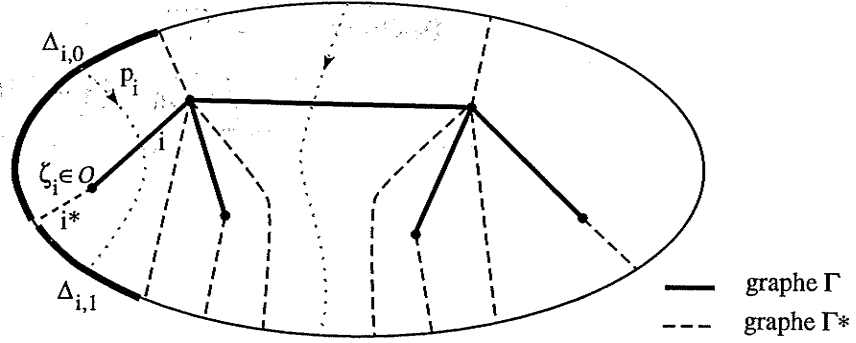


Figure 3.1: Graphe squelette et son dual.

Pour un graphe squelette Γ donné, il n'existe qu'un seul graphe dual Γ^* , à isotopie près. Dans la suite, nous fixerons un tel graphe une fois pour toutes dans sa classe d'isotopie.

Le couple de graphes (Γ, Γ^*) vérifie les propriétés suivantes :

(G i) Soit $J \subset I$ un ensemble d'arêtes de Γ .

$\bigcup_{i \in J} \overline{R_i}$ est connexe par arcs si et seulement si $\bigcup_{i \in J} i$ est connexe par arcs.

(G ii) Soit $J \subset I$; on note $J_m = J \cap \mathcal{S}_m$. Si $\bigcup_{i \in J} i$ est connexe par arcs, alors $\bigcup_{i \in J_m} i$ est connexe par arcs.

Ces propriétés entraînent :

(G iii) Soit $J \subset I$. On note comme ci-dessus $J_m = J \cap \mathcal{S}_m$. Si $\bigcup_{i \in J} \overline{R_i}$ est connexe par arcs, alors $\bigcup_{i \in J_m} \overline{R_i}$ est connexe par arcs.

La frontière ∂R_i de chaque composante R_i a exactement deux segments $\Delta_{i,0}$ et $\Delta_{i,1}$ dans ∂D^2 (voir fig.3.1). Soit i une arête de Γ . On considère l'ensemble P_i des arcs plongés dans R_i reliant $\Delta_{i,0}$ à $\Delta_{i,1}$:

$$P_i = \{p_i : [0; 1] \hookrightarrow R_i \mid p_i(0) \in \Delta_{i,0} \text{ et } p_i(1) \in \Delta_{i,1}\}.$$

Définition : Soit $f \in \text{Difféo}^+(D^2)$ ayant une orbite périodique \mathcal{O} . Soit Γ un graphe-squelette par rapport à \mathcal{O} dont l'ensemble des sommets internes est (globalement) invariant par f . On note I l'ensemble des arêtes de Γ . La *matrice d'incidence* de f par rapport à Γ est la matrice

$$M(\Gamma, f) = (m_{i,j})_{(i,j) \in I \times I}$$

définie par

$$m_{i,j} = \min\{\text{Card}\{p_i \cap f(j)\} \mid p_i \in P_i\}.$$

Pour chaque couple d'arêtes (i, j) , on appelle $p_i(j)$ un chemin p_i qui réalise le minimum de cette définition.

Remarquons quelques propriétés des chemins p_i .

(i) Soit i une arête de Γ et $p_i \in P_i$. Alors $D^2 - p_i$ a deux composantes connexes, et chacune contient une des extrémités de i .

- (ii) Soit i une arête terminale de Γ (aboutissant à $\xi \in \mathcal{O}$) et $p_i \in P_i$. Alors $D^2 - p_i$ a deux composantes connexes, l'une d'entre elles contient ξ et l'autre contient tous les autres sommets de Γ .
- (iii) Soient i et j deux arêtes de Γ telles que $m_{i,j} \neq 0$. Alors à chaque point d'intersection de $f(j)$ avec $p_i(j)$, " $f(j)$ change de composante connexe de $D^2 - p_i(j)$ ".

On note que, quitte à modifier f par une isotopie, on peut supposer que le triplet (f, Γ, Γ^*) est tel que pour toutes arêtes i, j vérifiant $m_{i,j} = 0$ on a $f(j) \cap \overline{R_i} = \emptyset$.

Le *rayon spectral* d'une matrice M à coefficients positifs ou nuls est sa plus grande valeur propre. On peut également l'exprimer par la formule $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|M^n\|}$ (cette limite ne dépend pas de la norme choisie). On utilise la notation $\rho(M)$ pour désigner le rayon spectral de la matrice M .

Propriété 3.2.1 Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices à coefficients positifs. On suppose que pour tous i, j $a_{i,j} \geq b_{i,j}$. Alors

$$\rho(A) \geq \rho(B).$$

Ceci provient immédiatement de la formule $\rho(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|M^n\|}$ en prenant comme norme $\|M\| = \sum_{i,j} |m_{i,j}|$.

Théorème 3.2.2 ([Lo1], [BH1], [FM]) Soit $f_0 \in \text{Diff}^+(D^2)$ ayant une orbite périodique \mathcal{O} telle que $f_0|_{D^2 - \mathcal{O}}$ est pseudo-Anosov. Alors il existe un graphe-squelette Γ par rapport à \mathcal{O} et un difféomorphisme f dans $[f_0|_{D^2 - \mathcal{O}}]$ laissant les sommets de Γ globalement invariants tels que la matrice $M(\Gamma, f)$ est transitive, et

$$\log \rho(M(\Gamma, f)) = h(f_0).$$

3.3 Démonstration du théorème 3.0.2

Nous rappelons d'abord une méthode introduite par Block, Misiurewicz, Guckenheimer et Young ([BGMY]) pour calculer simplement le polynôme caractéristique d'une matrice à coefficients entiers positifs (et donc son rayon spectral). Nous démontrons ensuite le théorème 3.0.2.

Un *graphe orienté* \mathcal{G} est la donnée d'un ensemble fini \mathcal{S} appelé ensemble des sommets, et d'une application $F_{\mathcal{G}} : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{N}$. Lorsque $F_{\mathcal{G}}(s_1, s_2) = n$, on dit que " n flèches vont du sommet s_1 au sommet s_2 ".

On associe de manière naturelle à chaque graphe orienté une matrice à coefficients entiers positifs indexée par $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$, et réciproquement. L'*entropie* d'un graphe orienté est le logarithme du rayon spectral de la matrice qui lui est associée.

Définitions. Soit \mathcal{G} un graphe orienté et $p = p_0 p_1 \dots p_k$ un chemin dans \mathcal{G} , c'est-à-dire une suite ordonnée de sommets de \mathcal{G} . La *largeur* de p est $w(p) = \prod_{j=1}^k F_{\mathcal{G}}(p_{j-1}, p_j)$. L'entier k est appelé *longueur* du chemin, et est noté $l(p)$.

Un ensemble \mathcal{R} de sommets de \mathcal{G} est appelé *rome* s'il n'y a pas de boucle en dehors de \mathcal{R} ; c'est à dire s'il n'y a pas de chemin $p = p_0 p_1 \dots p_k$ tel que $p_0 = p_k$ et $\{p_0, \dots, p_k\}$ est disjoint de \mathcal{R} .

Soit \mathcal{R} une rome et p un chemin. On dit que p est *simple par rapport à \mathcal{R}* si $p_0 \in \mathcal{R}, p_k \in \mathcal{R}$ et $\{p_1, \dots, p_{k-1}\}$ est disjoint de \mathcal{R} .

Supposons que $\mathcal{R} = \{s_1 \dots s_q\}$ forme une rome. On définit la matrice $M'_{\mathcal{R}}(x) = (m'_{i,j}(x))_{1 \leq i,j \leq q}$ associée à cette rome, qui est de taille q , par :

$$m'_{i,j}(x) = \sum_p w(p) x^{-l(p)}, \quad (3.1)$$

la sommation se faisant sur tous les chemins simples p allant de s_i à s_j .

Proposition 3.3.1 ([BGMY]) *Soit \mathcal{G} un graphe orienté ayant K sommets et \mathcal{R} une rome de \mathcal{G} ayant q sommets. Soit M la matrice associée à \mathcal{G} et $M'_{\mathcal{R}}$ la matrice associée à la rome \mathcal{R} définie par la formule (3.1).*

Le polynôme caractéristique de M vaut :

$$\chi_M(x) = (-1)^{K-q} x^K \det(M'_{\mathcal{R}}(x) - Id_q). \quad (3.2)$$

Soit $f_0 \in \text{Diff}^+(D^2)$ ayant une orbite périodique \mathcal{O} de période n . On suppose que $[f_0|_{D^2-\mathcal{O}}]$ est pseudo-Anosov. On veut montrer que

$$h(f) \geq \log x_n,$$

où x_n est la plus grande racine du polynôme $P_n(x) = x^{2n-3} - x^n - x^{n-3} - 1$. Pour cela, d'après la propriété 3.1.1 iii), il suffit de le montrer dans le cas où l'application $f_0|_{D^2-\mathcal{O}}$ est elle-même pseudo-Anosov.

Supposons que $f_0|_{D^2-\mathcal{O}}$ est pseudo-Anosov. D'après le théorème 3.2.2, il existe un graphe-squelette Γ et un difféomorphisme $f \in [f_0|_{D^2-\mathcal{O}}]$ laissant les sommets de Γ globalement invariants tels que

$$\log \rho(M(\Gamma, f)) = h(f_0).$$

Considérons le graphe orienté \mathcal{G} associé à $M(\Gamma, f)$. On peut partitionner en deux l'ensemble des sommets de \mathcal{G} , en distinguant ceux qui correspondent à une arête terminale de Γ et ceux qui correspondent à une arête interne :

$$\mathcal{S}(\mathcal{G}) = \mathcal{S}_t \cup \mathcal{S}_m,$$

avec

$$\mathcal{S}_t = \{s \in \mathcal{S}(\mathcal{G}) \mid s \text{ correspond à une arête terminale}\},$$

$$\mathcal{S}_m = \{s \in \mathcal{S}(\mathcal{G}) \mid s \text{ correspond à une arête interne}\}.$$

On sait que $\text{Card}(\mathcal{S}_t) = n$ et $\text{Card}(\mathcal{S}_m) = r \leq n - 3$

Si le graphe Γ n'a pas d'arêtes internes ($r = 0$), des arguments analogues à ceux développés ci-dessous (mais plus simples) montrent que l'entropie de \mathcal{G} est supérieure à la

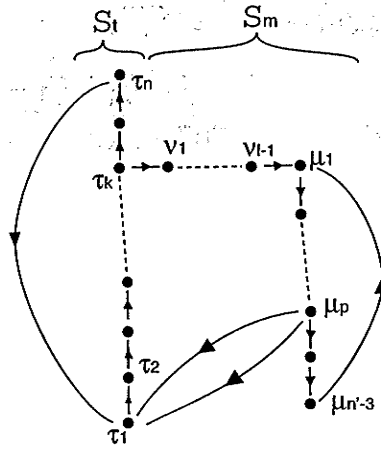


Figure 3.2: Le graphe \mathcal{G}_1 .

plus grande racine du polynôme $Q_n(x) = x^n - 2x^{n-1} - 1$, qui est elle-même plus grande que 2. Le résultat est donc vrai dans ce cas. Nous supposons dans toute la suite que S_m est non vide (et donc $n \geq 4$).

PREMIÈRE ÉTAPE

Lemme 3.3.2 *Avec les notations précédentes, \mathcal{G} contient un sous-graphe \mathcal{G}_1 , représenté sur la figure 3.2, formé de*

- une boucle de longueur n dans S_t :

$$\tau_1 \rightarrow \tau_2 \rightarrow \dots \rightarrow \tau_n \rightarrow \tau_1$$

- une boucle de longueur $n' - 3$ dans S_m ($n' - 3 \leq r$) :

$$\mu_1 \rightarrow \dots \rightarrow \mu_{n'-3} \rightarrow \mu_1$$

- deux flèches allant d'un certain μ_p à τ_1 ($1 \leq p \leq n' - 3$)
- un chemin de longueur l allant d'un certain τ_k à μ_1 en passant par des arêtes internes autres que les μ_i , c'est-à-dire un chemin de la forme $\tau_k \rightarrow \nu_1 \rightarrow \dots \rightarrow \nu_{l-1} \rightarrow \mu_1$, avec $0 \leq l - 1 \leq r - (n' - 3)$ et $1 \leq k \leq n$, les $\{\nu_i\}_{1 \leq i \leq l-1}$ étant disjoints des $\{\mu_i\}_{1 \leq i \leq n'-3}$.

Notons $E = \{(n', k, l, p) \mid 1 \leq n' - 3 \leq n - 3; 1 \leq k \leq n; 1 \leq l \leq n - n' + 1; 1 \leq p \leq n' - 3\}$. Comme $r \leq n - 3$, on voit que le quadruplet (n', k, l, p) donné par le lemme 3.3.2 est un élément de E .

La démonstration du lemme 3.3.2 utilise les propositions 3.3.3 à 3.3.7 qui suivent

Proposition 3.3.3 *Il existe une boucle de longueur n dans S_t .*

Preuve : Le difféomorphisme f permute cycliquement les points de \mathcal{O} . On note $\mathcal{O} = \{\xi_1 \dots \xi_n\}$, en indexant les points de sorte que $f(\xi_i) = \xi_{i+1[n]}$. Notons b_i la branche terminale de Γ arrivant à ξ_i , et s_i le sommet de \mathcal{G} correspondant à b_i .

L'image $f(b_i)$ est un arc dans D^2 qui connecte ξ_{i+1} à un autre sommet. D'après la propriété (ii) de la section 3.2, il intersecte tout chemin $p_{i+1} \in P_{i+1}$. Donc la matrice d'incidence satisfait $m_{i,i+1} \geq 1$.

Il existe donc une flèche dans $\mathcal{G} : s_i \rightarrow s_{i+1[n]}$ pour tout i , ce qui démontre l'existence de la boucle $s_1 \rightarrow \dots \rightarrow s_n \rightarrow s_1$. \square

Proposition 3.3.4 *Il existe $s_m \in \mathcal{S}_m$ et $s_t \in \mathcal{S}_t$ tels que $F_{\mathcal{G}}(s_m, s_t) \geq 2$.*

Preuve : Montrons d'abord que pour tout $s_m \in \mathcal{S}_m$ et $s_t \in \mathcal{S}_t$, $F_{\mathcal{G}}(s_m, s_t)$ est pair (éventuellement nul). On appelle b_m (resp. b_t) l'arête de Γ associée à s_m (resp. s_t). Soit ξ_t le sommet terminal de b_t . On considère un chemin p inclus dans le secteur R_{b_t} et dont l'intersection avec $f(b_m)$ est de cardinal minimal.

D'après la propriété (i) de la section 3.2, $D^2 - p$ a deux composantes connexes : l'une contient ξ_t , nous la noterons Θ , et l'autre contient tous les autres sommets de Γ , nous la noterons Δ . Les deux extrémités de $f(b_m)$ sont dans Δ , donc $f(b_m)$ intersecte un nombre pair de fois p (propriété (iii) de la section 3.2).

Par ailleurs, $F_{\mathcal{G}}(s_m, s_t)$ ne peut pas être nul pour tous les sommets $s_m \in \mathcal{S}_m$ et $s_t \in \mathcal{S}_t$ puisque le graphe \mathcal{G} est transitif. \square

Notons $\mathcal{M} = \{s \in \mathcal{S}_m \mid \text{il existe } s' \in \mathcal{S}_t \text{ avec } F_{\mathcal{G}}(s, s') \geq 2\}$. La proposition précédente affirme que $\mathcal{M} \neq \emptyset$.

Proposition 3.3.5 *Il existe $s_t \in \mathcal{S}_t$ et $s_m \in \mathcal{S}_m$ tels que $F_{\mathcal{G}}(s_t, s_m) \geq 1$.*

Ceci découle du fait que le graphe \mathcal{G} est transitif. \square

Proposition 3.3.6 *Pour tout $s_m \in \mathcal{S}_m$, il existe $s \in \mathcal{M}$ et il existe un chemin qui part de s_m et qui arrive à s , en restant dans \mathcal{S}_m .*

Preuve : Soit $s_m \in \mathcal{S}_m$. On fixe $s_0 \in \mathcal{M}$. Par transitivité de \mathcal{G} , il existe un chemin de s_m à s_0 dans \mathcal{S} :

$$s_m \rightarrow \alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_q \rightarrow \alpha_{q+1} = s_0$$

S'il existe un i tel que $\alpha_i \in \mathcal{S}_t$, alors on choisit i_0 le plus petit tel indice. Dans ce cas $\alpha_{i_0-1} \in \mathcal{M}$ d'après l'argument de la proposition 3.3.4. Sinon, le chemin de s_m à s_0 est dans \mathcal{S}_m . \square

Proposition 3.3.7 *Soit $s \in \mathcal{S}_m$. Alors il existe une boucle qui part de s et qui reste dans \mathcal{S}_m .*

Preuve : Soit \mathcal{S}_m l'ensemble des arêtes internes. Soit $\tilde{\mathcal{G}}$ le graphe dont l'ensemble des sommets est \mathcal{S}_m et dont l'application "nombre de flèches" est définie par $F_{\tilde{\mathcal{G}}} = F_{\mathcal{G}}|_{\mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_m}$. On cherche une boucle dans $\tilde{\mathcal{G}}$ partant de s .

On note $\mathcal{P}(\mathcal{S}_m)$ l'ensemble des parties de \mathcal{S}_m . On définit une application Φ par :

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{P}(\mathcal{S}_m) &\rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{S}_m) \\ B &\mapsto \bigcup_{b \in B} \{c \in \mathcal{S}_m \mid m_{b,c} \geq 1\} \end{aligned}$$

En particulier, si b est une arête de Γ , $\Phi(\{b\}) = \{c \in \mathcal{S}_m \mid m_{b,c} \geq 1\}$. On notera abusivement $\Phi(b)$ au lieu de $\Phi(\{b\})$. Notons que $\Phi(a) \ni b$ si et seulement si il existe (au moins) une flèche allant de a à b dans $\tilde{\mathcal{G}}$.

Il est immédiat que

$\Phi^n(a) \ni b \Leftrightarrow$ il existe un chemin de longueur n dans $\tilde{\mathcal{G}}$ allant de a à b

Soit b une arête interne, A et B les sommets de Γ qui la limitent. Il résulte des propriétés (G ii) et (G iii) énoncées dans la section 3.2 que $\bigcup_{c \in \Phi(b)} c$ est une partie connexe par arcs de Γ , qui contient $f(A)$ et $f(B)$.

Soit T une réunion connexe d'arêtes internes de Γ . Il vient, par récurrence sur le nombre d'arêtes dans T , que l'image par Φ de T est une partie connexe par arcs de Γ .

Soit $s \in \mathcal{S}_m$. On appelle b l'arête interne qui lui est associée. Soient A et B les extrémités de b . Comme f permute les sommets de Γ , il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k(A) = A$ et $f^k(B) = B$. Or $\Phi^k(b)$ est une partie connexe par arcs de Γ , qui contient A et B , donc $\Phi^k(b) \supset b$ (puisque Γ est un arbre), ce qui achève la démonstration. \square

Démonstration du lemme 3.3.2 :

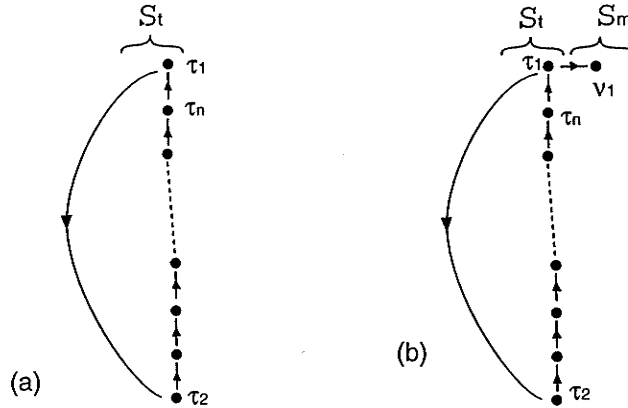


Figure 3.3: Démonstration du lemme 3.3.2, étapes (a) et (b).

D'après la proposition 3.3.3, il existe une boucle de longueur n dans S_t (figure 3.3a). Notons-la

$$\tau_1 \rightarrow \tau_2 \rightarrow \dots \rightarrow \tau_n \rightarrow \tau_1.$$

D'après la proposition 3.3.5, quitte à renuméroter les τ_i , on peut supposer que la flèche $\tau_1 \rightarrow \nu_1$ existe, pour une arête $\nu_1 \in S_m$ (cf fig. 3.3b).

D'après la proposition 3.3.6, il existe $\mu_1 \in \mathcal{M}$ tel que le chemin suivant existe

$$\tau_1 \rightarrow \nu_1 \rightarrow \dots \rightarrow \nu_{q-1} \rightarrow \mu_1,$$

les ν_i étant tous dans S_m . Quitte à supprimer les boucles, on peut supposer que ce chemin n'en contient pas (i.e. les ν_i sont distincts et $\mu_1 \neq \nu_i$ pour tout i).

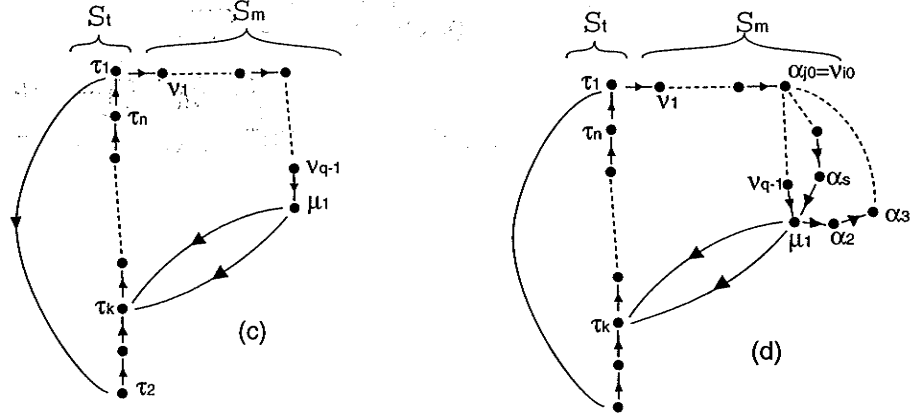


Figure 3.4: Démonstration du lemme 3.3.2, étapes (c) et (d).

Puisque $\mu_1 \in \mathcal{M}$ au moins deux flèches partent de μ_1 vers un élément de S_t que nous notons τ_k : i.e. $F_G(\mu_1, \tau_k) \geq 2$ (cf fig. 3.4c).

D'après la proposition 3.3.7, il existe une boucle qui part de μ_1 et qui reste dans S_m :

$$\mu_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_s \rightarrow \mu_1$$

les α_j étant tous dans S_m .

On considère j_0 le plus petit indice j tel que il existe i vérifiant $\alpha_j = \nu_i$ (s'il n'en existe pas, on pose $j_0 = s + 1$). Soit i_0 tel que $\alpha_{j_0} = \nu_{i_0}$ (cf fig. 3.4d). On supprime le chemin $\alpha_{j_0+1} \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_s$ et on obtient la figure 3.2 à changement de nom près. \square

DEUXIÈME ÉTAPE

On sait que l'entropie de f_0 est égale à l'entropie du graphe \mathcal{G} associé à la matrice d'incidence $M(\Gamma, f)$. L'entropie de \mathcal{G} est minorée par l'entropie du sous-graphe \mathcal{G}_1 .

Il nous reste maintenant à calculer l'entropie du sous-graphe \mathcal{G}_1 ainsi trouvé. Pour cela nous allons utiliser la proposition 3.3.1. On vérifie que $\mathcal{R} = \{\tau_k; \mu_p\}$ est une rome pour le sous-graphe \mathcal{G}_1 (voir figure 3.2). La matrice associée à cette rome est, en utilisant les notations du lemme 3.3.2 :

$$\begin{pmatrix} x^{-n} - 1 & x^{-l-p+1} \\ 2x^{-k} & x^{-n'+3} - 1 \end{pmatrix}$$

L'entropie de \mathcal{G}_1 est donc donnée par le logarithme de la plus grande racine du polynôme

$$P_{n',k,l,p}(x) = x^{n+n'-3+l-1} - x^{n+l-1} - x^{n'-3+l-1} - 2x^{n+n'-3-k-p} + x^{l-1}$$

que nous noterons $x_{n',k,l,p}$.

Rappelons que $(n', k, l, p) \in E$.

Le théorème 3.0.2 est alors une conséquence du résultat suivant, qui s'établit par des calculs élémentaires :

Proposition 3.3.8 *Le minimum de $\{x_{n',k,l,p} \mid (n', k, l, p) \in E\}$ est atteint pour la valeur des paramètres $(n', k, l, p) = (n, n, 1, n - 3)$.*

schéma de la démonstration :

On sait que $x_{n',k,l,p} > 1$.

Si les paramètres n', l, p sont fixés, le minimum de $x_{n',k,l,p}$ est atteint pour $k = n$.

Si $k = n$ et n', p sont fixés, le minimum de $x_{n',n,l,p}$ est atteint pour $p = n' - 3$.

Si $k = n$, $p = n' - 3$ et la quantité $n' + l$ est fixée égale à q , le minimum de $x_{n',n,q-n',n'-3}$ est atteint pour $l = q - n' = 1$.

Si $k = n$, $p = n' - 3$, $l = 1$, le minimum de $x_{n',n,1,n'-3}$ est atteint pour $n' = n$. \square

3.4 Démonstration du théorème 3.0.1 à partir du théorème 3.0.2

Etude de la suite (x_n) .

Proposition 3.4.1 Pour tout n , $x_n > (1 + \sqrt{2})^{1/n}$.

On a même l'équivalent $\log x_n \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(1 + \sqrt{2})$.

Preuve : Une étude de la monotonie de P_n sur $[1; +\infty[$ et un calcul de valeurs montrent que $(1 + \sqrt{2})^{1/n} \leq x_n \leq 3^{1/n}$. Notons

$$y_n = \frac{x_n}{(1 + \sqrt{2})^{1/n}}.$$

On sait donc que $1 \leq (y_n)^n \leq \frac{3}{(1 + \sqrt{2})^{1/n}}$. L'égalité $P_n(y_n(1 + \sqrt{2})^{\frac{1}{n}}) = 0$ donne

$$y_n^{2n-3}(1 + \sqrt{2})^{2-3/n} = y_n^n(1 + \sqrt{2}) + y_n^{n-3}(1 + \sqrt{2})^{1-3/n} + 1.$$

Toute valeur d'adhérence c de la suite y_n^n vérifie donc

$$c^2(1 + \sqrt{2})^2 = c(1 + \sqrt{2}) + c(1 + \sqrt{2}) + 1.$$

Il vient $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^n = 1$, ce qui démontre la proposition. \square

Preuve du théorème 3.0.1.

Soit $f \in \text{Difféo}^+(D^2)$ ayant une orbite périodique \mathcal{O} de période n . Supposons que la classe d'isotopie de f dans $D^2 - \mathcal{O}$ n'est pas d'entropie nulle.

Premier cas : $[f]$ est pseudo-Anosov.

Le résultat est une conséquence du théorème 3.0.2 et de la proposition 3.4.1.

Deuxième cas : f est canonique.

Alors il existe une famille (S_i) de sous-surfaces de S (pas forcément connexes) d'intérieurs deux à deux disjoints telle que

$$S = \bigcup_i S_i$$

et chaque S_i est f -invariant.

On note $\{S_i^j\}_j$ l'ensemble des q_i composantes connexes de S_i . Chaque S_i^j est fixé par l'itéré f^{q_i} et $f^{q_i}|_{S_i^j}$ est soit d'ordre fini soit pseudo-Anosov. Comme f n'est pas d'entropie

nulle, il existe au moins un indice i_0 tel que les applications induites $f^{q_{i_0}}|_{S_{i_0}^j}$ sont pseudo-Anosov.

Supposons que $S_{i_0}^j$ est homéomorphe à un disque privé d'un nombre fini $u \geq 2$ de points $\{y_1, \dots, y_u\}$ (ce sont alors des points de \mathcal{O}). On voit que $\{y_1, \dots, y_u\}$ est une orbite périodique de $f^{q_{i_0}}|_{S_{i_0}^j}$. D'après la proposition 3.4.1 et le théorème 3.0.2 appliqué à $f^{q_{i_0}}|_{S_{i_0}^j}$ il vient:

$$h(f^{q_{i_0}}|_{S_{i_0}^j}) \geq 1/u \log(1 + \sqrt{2}).$$

D'où

$$h(f^{q_{i_0}}) \geq 1/u \log(1 + \sqrt{2}),$$

puis

$$h(f) \geq 1/(uq_{i_0}) \log(1 + \sqrt{2}).$$

Or $n \geq uq_{i_0}$ puisque $S_{i_0}^j, f(S_{i_0}^j), \dots, f^{q_{i_0}-1}(S_{i_0}^j)$ contiennent chacun u points de \mathcal{O} . Donc

$$h(f) \geq 1/n \log(1 + \sqrt{2}).$$

Si $S_{i_0}^j$ n'est pas homéomorphe à un disque privé d'un nombre fini de points alors $S_{i_0}^j$ est homéomorphe à un disque privé d'un nombre fini $v \geq 2$ de "petits" disques D_l (chaque D_l est alors une réunion de S_i^j , et les D_l sont permutés cycliquement par $f^{q_{i_0}}$).

Soit g l'homéomorphisme de $S_{i_0}^j \cup \bigcup_l D_l$ égal à $f^{q_{i_0}}$ sur $S_{i_0}^j$ et tel que pour tout l , $g^v|_{D_l}$ est une rotation rigide. Or l'entropie d'une rotation rigide est nulle et donc $h(g) \leq q_{i_0} h(f)$; et g est isotope à un difféomorphisme du disque ayant une orbite périodique de période v , pseudo-Anosov par rapport à cette orbite, donc d'après le théorème 3.0.2, $h(g) \geq 1/v \log(1 + \sqrt{2})$.

Comme chaque D_l contient au moins un point de \mathcal{O} , $vq_{i_0} \leq n$ et le théorème est démontré dans ce cas.

Troisième cas : $[f]$ réductible et f non canonique.

L'entropie de f est plus grande que celle du représentant canonique de sa classe (d'après le lemme 3.1.2), qui est elle-même plus grande que $1/n \log(1 + \sqrt{2})$. \square

1. The first part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various offices of the city government. The names are listed in alphabetical order, and each name is followed by the office to which he or she has been appointed. The list is as follows:

Chapitre 4

Critères topologiques pour les tresses admettant des déstabilisations et des mouvements d'échange

Introduction

Il y a un certain nombre d'objets géométriques associés à une tresse β du groupe de tresses à n brins B_n . Dans ce chapitre nous nous intéressons à deux d'entre eux, à savoir la *fermeture* $K(\beta)$ de la tresse β qui est un entrelacs dans S^3 , et la classe d'isotopie $[f_\beta]$ d'homéomorphismes du disque à n points marqués induite par β , cf [Bi]. Notre but est d'étudier la fermeture $K(\beta)$ à partir de propriétés de $[f_\beta]$. L'étude d'entrelacs de S^3 grâce aux tresses a une longue histoire, un des problèmes majeurs est qu'il y a une infinité de tresses qui ont la même fermeture. Cette infinité a été décrite par un résultat classique de Markov [Ma], cf aussi [Bi]. On associe à une tresse à n brins deux tresses à $n + 1$ brins $S_+(\beta)$ et $S_-(\beta)$ qui ont la même fermeture que β , cf figure 4.1. La transformation de β en $S_+(\beta)$ ou $S_-(\beta)$ est appelée une *stabilisation*. L'opération réciproque est appelée *déstabilisation*. Le théorème de Markov affirme que si deux tresses $\beta \in B_n$ et $\beta' \in B_n$ ont la même fermeture, alors il existe une suite finie de tresses

$$\beta = \beta_0 \rightarrow \beta_1 \rightarrow \beta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \beta_k = \beta'$$

telle que chaque transition $\beta_i \rightarrow \beta_{i+1}$ est une conjugaison, une stabilisation ou une déstabilisation.

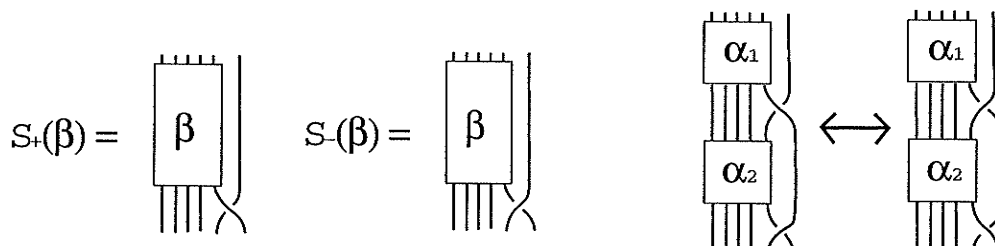


Figure 4.1: Les tresses $S_+(\beta)$ et $S_-(\beta)$; mouvement d'échange.

Cependant, ce résultat ne mène pas à un algorithme effectif permettant de décider si deux tresses ont la même fermeture. En particulier, il n'y a pas de borne sur le nombre de brins des tresses dans la suite, ni sur le nombre d'opérations à effectuer.

Birman et Menasco [BM] ont défini une autre transformation appelée *mouvement d'échange* qui transforme une tresse à n brins en une autre tresse à n brins qui a la même fermeture, cf figure 4.1. Cette opération ne peut être appliquée que si la tresse est d'une forme particulière. Il existe une généralisation de cette opération qui donne une infinité de classes de conjugaison distinctes de tresses à n brins ayant la même fermeture, un exemple a été donné par Fiedler [Fi]. Birman et Menasco définissent une fonction de complexité sur l'ensemble des tresses dont la fermeture est l'entrelacs trivial à r composantes, et prouvent que si $\beta \in B_n$ est une tresse dont la fermeture est l'entrelacs trivial à r composantes alors il existe une suite finie de tresses

$$\beta = \beta_0 \rightarrow \beta_1 \rightarrow \beta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \beta_k = \alpha_r$$

où α_r est la tresse triviale à r brins, telle que chaque transition $\beta_i \rightarrow \beta_{i+1}$ est une conjugaison, une déstabilisation ou un mouvement d'échange. On note que le nombre de brins dans cette suite n'augmente pas.

Une question importante et difficile est de pouvoir décider si deux tresses données ont la même fermeture. Une question plus restreinte est de pouvoir décider si la fermeture d'une tresse donnée est l'entrelacs trivial.

A la lumière des résultats ci-dessus, une question intermédiaire qui se pose naturellement est : quand est-ce qu'une tresse admet une déstabilisation, autrement dit, étant donnée $\beta \in B_n$, existe-t-il $\delta \in B_n$ et $\alpha \in B_{n-1}$ telles que $\beta = \delta S_{\pm}(\alpha) \delta^{-1}$? Une autre question est : quand est-ce qu'une tresse admet un mouvement d'échange, autrement dit, étant donnée $\beta \in B_n$, existe-t-il $\delta \in B_n$, α_1 et $\alpha_2 \in B_{n-1}$ telles que $\beta = \delta \alpha_1 \sigma_{n-1} \alpha_2 \bar{\sigma}_{n-1} \delta^{-1}$ ou $\beta = \delta \alpha_1 \bar{\sigma}_{n-1} \alpha_2 \sigma_{n-1} \delta^{-1}$?

D'après notre définition, la propriété d'admettre une déstabilisation ou un mouvement d'échange est invariante par conjugaison. Le problème de conjugaison dans B_n a été résolu d'abord par Garside [Ga]. Mais résoudre le problème de déstabilisation ou du mouvement d'échange est plus complexe. Par exemple pour le problème de déstabilisation, on doit résoudre une équation dans B_n de la forme $\beta = \delta S_{\pm}(\alpha) \delta^{-1}$ où δ et α sont inconnues. Le seul résultat partiel connu à propos du problème de déstabilisation concerne B_4 et est apparu dans [Ak].

On sait qu'une tresse β induit une classe d'isotopie $[f_{\beta}]$ d'homéomorphismes du disque à n points marqués, cf [Bi]. Deux tresses induisent la même classe d'isotopie si et seulement si elles sont dans la même classe modulo Z_n , le centre du groupe de tresses B_n . Une tresse β admet une déstabilisation mod Z_n si elle est de la forme $\beta = \delta S_{\pm}(\alpha) \delta^{-1} \Delta_n^k$ où $\delta \in B_n$, $\alpha \in B_{n-1}$ et Δ_n est le générateur de Z_n . Dans ce chapitre nous prouvons les deux théorèmes suivants :

Théorème 4.0.1 (Critère de déstabilisation)

Une tresse β admet une déstabilisation mod Z_n si et seulement si il existe un homéomorphisme $f \in [f_{\beta}]$ et un arc γ allant d'un point marqué au bord du disque tel que $f(\gamma) \cap \gamma = \emptyset$.

Théorème 4.0.2 (Critère pour le mouvement d'échange)

Une tresse β admet un mouvement d'échange mod Z_n si et seulement si il existe un homéomorphisme $f \in [f_\beta]$ et deux arcs γ_1 et γ_2 allant de deux points marqués distincts au bord du disque tels que $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$ et $f(\gamma_1) \cap \gamma_2 = \emptyset$.

Ce chapitre est rédigé en anglais. Dans une première partie, nous rappelons la définition du groupe B_n des tresses à n brins. Depuis Artin, on sait qu'une tresse β à n brins induit une classe d'isotopie $[f_\beta]$ d'homéomorphismes du disque. Nous précisons ceci en reprenant une façon de construire le morphisme $B_n/Z_n \rightarrow MCG(D_n)$, où Z_n est le centre du groupe de tresses, qui est un groupe cyclique ; et $MCG(D_n)$ désigne ici le mapping class group du disque à n points marqués, l'isotopie étant libre sur le bord. Nous reprenons également les définitions de ce qu'est une tresse qui admet une *déstabilisation* et un *mouvement d'échange*, ces notions étant invariantes par conjugaison.

Dans une deuxième partie, nous démontrons quelques résultats de géométrie du disque. Ces lemmes permettent de relier des propriétés algébriques des tresses avec des propriétés géométriques des éléments du mapping class group qu'elles induisent. L'avantage des propriétés géométriques obtenues est qu'elles sont invariantes par conjugaison. Dans les deux dernières parties, nous déduisons de façon élémentaire à partir des lemmes de la deuxième partie des critères géométriques permettant de décider si une tresse admet une déstabilisation ou un mouvement d'échange. Bien entendu, ces critères sont donnés modulo Z_n .

4.1 Braids and homeomorphisms

Punctured disk, homeomorphisms. We consider D a closed disk in the oriented euclidean plane and an integer $n \geq 3$. Let $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ be a set of n *distinguished points*, also called *punctures*, along the horizontal diameter of D . The labels of the points are chosen to increase as the coordinate along the diameter increases. An arc from a puncture $x_i \in X$ to the boundary ∂D of D is an embedded arc that does not meet $X \cup \partial D$ excepted at the endpoints.

Let $MCG(D, X)$ be the group of orientation preserving homeomorphisms of D , preserving X setwise, up to isotopy relative to X . Elements of the group $MCG(D, X)$ will sometimes be called *mapping classes*. One can note that the mapping class group as defined here is not the standard mapping class group since the isotopy is free on the boundary. We denote by $D_n = D - X$ the punctured disk.

The classification theorem of Nielsen-Thurston ([FLP],[Th]) states that the elements of $MCG(D, X)$ are divided into three types : the *periodic*, the *pseudo-Anosov*, the *reducible* elements.

Braids. A *geometric braid based on X* is a collection of n arcs, called *strings*, disjointly embedded in $\mathring{D} \times I$. Each string connects $(x_i, 0)$ to $(x_i, 1)$ and intersects each level disk $\mathring{D} \times \{t\}$ in a single point, see fig.4.2a. Two geometric braids are *equivalent* if there is an ambient isotopy of $\mathring{D} \times I$ fixing the endpoints of the strings that transforms one into the other. A *braid based on X* is an equivalence class of geometric braids based on X . The

set of braids based on X is a group $B_n(X)$. If X' is another set of n punctures, the braid group $B_n(X')$ is isomorphic to $B_n(X)$. The set X is fixed once and for all. We shall denote B_n the group of braids based on X . Consider the braid σ_i defined on fig.4.2b (cf [Bi] for more details). The set of braids $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ generates the braid group. More precisely, Artin showed [Ar] that the braid group B_n admits the presentation :

$$\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ if } |i - j| > 1 ; \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \rangle .$$

We shall denote by $\bar{\sigma}_i$ the inverse of σ_i .

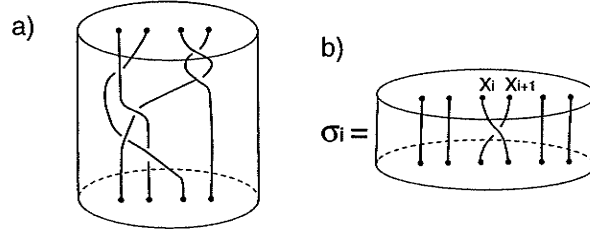


Figure 4.2: a) A 4-string braid ; b) the braid σ_i .

If one considers the set of generators $\{\sigma_i\}$, there is an injective group morphism $J : B_{n-1} \hookrightarrow B_n$, it maps the i -th generator of B_{n-1} to the i -th generator of B_n .

Let $\Delta_n \in B_n$ defined by $\Delta_n = (\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})^n$. The center Z_n of B_n is known to be the cyclic group generated by $\langle \Delta_n \rangle$, cf [Bi].

Half Dehn twists. Let \widetilde{D}_2 be a model of the twice punctured disk, namely \widetilde{D}_2 is the unit disk of the oriented plane, with distinguished points $(\frac{1}{2}; 0)$ and $(-\frac{1}{2}; 0)$. We define an homeomorphism $T : \widetilde{D}_2 \rightarrow \widetilde{D}_2$ as follows :

- T is the rotation of angle π in the disk of radius $\frac{1}{2}$. In particular T permutes the two distinguished points.
- On each circle of radius $r \in [\frac{1}{2}; 1]$, T is the rotation of angle $2\pi(1 - r)$. In particular T is the identity on $\partial \widetilde{D}_2$.

Let C be a simple closed curve embedded in $D - X$ so that one of the connected components of $D - C$ is a topological disk D_2 containing two punctures x_i and x_j . We shall define a homeomorphism f of D_n .

Let $g : D_2 \rightarrow \widetilde{D}_2$ be an orientation preserving homeomorphism mapping x_i and x_j to the punctures of \widetilde{D}_2 . The homeomorphism f is defined to be $g^{-1}Tg$ on D_2 and the identity outside D_2 . One can check that the mapping class $[f]$ does not depend on the choice of g . The idea is that any orientation preserving homeomorphism of \widetilde{D}_2 preserving the two distinguished points is isotopic either to id or to T . Thus the element $[f] \in MCG(D, X)$ does not depend on the choice of the map g . It is the *half Dehn twist* along the curve C , denoted $hdt(C)$.

One can check also that if C is isotopic to C' then $hdt(C) = hdt(C')$. If C is isotopic to C' , it is a result of Epstein [Ep] that there exists a self homeomorphism j of S isotopic

to the identity such that $j(C) = C'$. Using the homeomorphism j , one can find a representative of $hdt(C)$ and a representative of $hdt(C')$ that are isotopic. This proves that $hdt(C) = hdt(C')$.

Let C_i , $1 \leq i \leq n-1$, be the circle indicated on figure 4.3. The following theorem is a fundamental result on the relations between homeomorphisms of punctured disks and braids.

Theorem 4.1.1 ([Bi]) *The map*

$$\begin{aligned} \Phi : B_n &\rightarrow MCG(D, X) \\ \beta &\mapsto [f_\beta] \end{aligned}$$

defined on the system of generators $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ of B_n by $\Phi(\sigma_i) = hdt(C_i)$ is a surjective group morphism, of kernel $Z_n = \langle \Delta_n \rangle$.

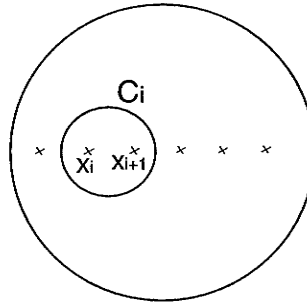


Figure 4.3: The circle C_i .

Remark. In fact, the map ϕ is an antimorphism, because the product of the braids is in the reverse order of the product of the mapping classes : $[f_{\alpha\beta}] = [f_\beta] \circ [f_\alpha]$. We however will make an abuse and call Φ a group morphism.

One says that the braid β *induces* the mapping class $\Phi(\beta)$; and sometimes write ' β induces f ' instead of ' β induces $[f]$ '.

Destabilization, exchange. A braid $\beta \in B_n$ is said to be in *standard Markov form* if $\beta = \alpha\sigma_{n-1}$ or $\beta = \alpha\bar{\sigma}_{n-1}$ where $\alpha \in J(B_{n-1})$. We recall that $\alpha \in J(B_{n-1})$ means that α can be written as a product of the generators $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}$ of B_n . The braid β is said to admit a *destabilization* if β is conjugated in B_n to a braid in standard Markov form. The braid β is said to admit a *destabilization mod Z_n* if there exists an integer k such that $\beta\Delta_n^k$ admits a destabilization.

Note : A calculation shows that if $\beta\Delta_n^k = \alpha\sigma_{n-1}$ with $\alpha \in J(B_{n-1})$ then $\beta\Delta_n^{k-1} = \alpha'\bar{\sigma}_{n-1}$ with $\alpha' \in J(B_{n-1})$.

The braid $\beta \in B_n$ admits a *standard exchange move* if $\beta = \alpha_1\sigma_{n-1}\alpha_2\bar{\sigma}_{n-1}$ where $\alpha_1, \alpha_2 \in J(B_{n-1})$. The braid $\beta \in B_n$ admits an *exchange move mod Z_n* if there exists an integer k such that $\beta\Delta_n^k$ is conjugated to a braid that admits a standard exchange move.

4.2 Geometrical results

Lemma 4.2.1 *We consider $[f] \in MCG(D, X)$ and a topological annulus $A \subset D_n$ containing the boundary ∂D .*

There exists a representative $f_0 \in [f]$ such that f_0 induces the identity map on A . Moreover, if one considers $f'_0 \in [f]$ that fixes a point $z \in \partial D$ then f_0 can be chosen to be isotopic to f'_0 relative to $X \cup \{z\}$.

Proof : The annulus A is the subset of the disk D between ∂D and some simple closed curve C that is isotopic to ∂D . We consider the case when C is a euclidean circle parallel to ∂D . Let f_1 be any element of $[f]$. One first applies an isotopy from f_1 to a map f_2 so that $f_2(C) = C$, this is possible (cf [Ep]) because $f_1(C)$ is homotopic to C . One performs then successive isotopies with support in a neighborhood of A , so that first the action on the circles between C and ∂D is the same as the action on the circle ∂D ; second the 'radial' action in the annulus A is the identity.

In the general case when C is any curve, one conjugates all the isotopies above by an ambient isotopy of D_n that transforms C into a circle parallel to the boundary. \square

Notation : In all the following, γ_n will denote the arc in D from the rightmost puncture x_n to ∂D along the horizontal axis, and γ_{n-1} will denote the arc from x_{n-1} to ∂D going downwards along the vertical direction, cf fig.4.4.

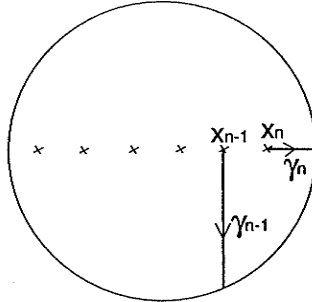


Figure 4.4: The arcs γ_{n-1} and γ_n .

Lemma 4.2.2 *The braid $\alpha \in B_n$ belongs to $J(B_{n-1}) \bmod Z_n$ iff there exists $f \in [f_\alpha]$ such that $f(\gamma_n) = \gamma_n$.*

We recall that $J : B_{n-1} \hookrightarrow B_n$ denotes the natural inclusion map.

Proof :

\Rightarrow We assume $\alpha \in J(B_{n-1})$. Let us consider the element $f \in [f_\alpha]$ that is the composition of standard half Dehn twists around circles C_i . The circles involved are C_i 's for $i \leq n-2$ hence f leaves γ_n invariant. If now $\alpha = \alpha' \Delta_n^k$ with $\alpha' \in J(B_{n-1})$, one knows from theorem 4.1.1 that $[f_\alpha] = [f_{\alpha'}]$ and the result follows.

\Leftarrow Conversely, we assume that there exists $f \in [f_\alpha]$ such that $f(\gamma_n) = \gamma_n$. Let us consider the $(n-1)$ -punctured disk \widetilde{D} obtained when cutting D_n along γ_n . The homeomorphism f induces a homeomorphism \widetilde{f} of \widetilde{D} . Lemma 4.2.1 implies that there is an homeomorphism f' of \widetilde{D} that is isotopic rel x_n to \widetilde{f} and that is the identity outside

the disk D' of figure 4.5. The mapping class $[f'] \in MCG(D', \{x_1, \dots, x_{n-1}\})$ is induced by a braid $\beta \in B_{n-1}$. It is clear that $[f]$ is induced by the braid $J(\beta)$. Hence $\alpha = J(\beta) \bmod Z_n$. \square

In the course of the proof of lemma 4.2.2 we have showed the

Corollary 4.2.3 *The braid $\alpha \in B_n$, $n \geq 3$, belongs to $J(B_{n-1}) \bmod Z_n$ iff the mapping class $[f_\alpha]$ induced by α on D_n leaves invariant up to isotopy the circle C' of figure 4.5.*

The braids of $J(B_{n-1})$ induce reducible mapping classes in the sense of Nielsen-Thurston theorem, that admit C' as a reduction curve. Indeed, since $n \geq 3$ the curve C' is an essential curve in the punctured disk D_n .

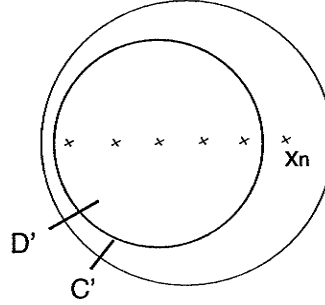


Figure 4.5: The circle C' and the disk D' .

Lemma 4.2.4 *There exists $f \in [f_{\bar{\sigma}_{n-1}}]$ such that $f(\gamma_n) = \gamma_{n-1}$.*

Proof : One checks that the image of γ_n under the standard model of $hdt(C_{n-1})^{-1}$ is homotopic to γ_{n-1} . It follows from [Ep] that there is some representative of $[f_{\bar{\sigma}_{n-1}}]$ that maps γ_n to γ_{n-1} . \square

Lemma 4.2.5 *We consider $i, j \in \{1, \dots, n\}$ with $i \neq j$. Let γ (resp. γ') be an arc in D from x_i (resp. x_j) to ∂D . We assume that the arcs γ and γ' have disjoint supports. Let γ_n and γ_{n-1} be the two arcs defined on fig.4.4.*

Then there exists an orientation preserving homeomorphism h of D_n such that $h(\gamma) = \gamma_{n-1}$ and $h(\gamma') = \gamma_n$

Proof : One considers the closed $n - 2$ punctured disk obtained when cutting D_n along the arcs γ and γ' . It contains two copies of the arc γ and two copies of the arc γ' in its boundary. This $n - 2$ punctured disk can be mapped homeomorphically to the $n - 2$ punctured disk obtained when cutting D_n along γ_n and γ_{n-1} . Moreover the homeomorphism can be assumed to map the copies of γ to the copies of γ_{n-1} , and the copies of γ' to the copies of γ_n . Glueing back the copies of the arcs gives a homeomorphism of D_n with the desired property. \square

Lemma 4.2.6 *Let $\beta \in B_n$. We assume that there exists $f \in [f_\beta]$, $i \in \{1, \dots, n\}$ and an arc γ from x_i to ∂D , that does not meet X nor ∂D except at its endpoints, such that $f(\gamma) = \gamma$. Then there exists $\delta \in B_n$, $\alpha \in J(B_{n-1})$ and $k \in \mathbb{Z}$ such that*

$$\beta = \delta \alpha \delta^{-1} \Delta_n^k$$

if moreover $i = n$ and $\gamma = \gamma_n$ then one can take $\delta = e$ (the trivial braid).

Proof :

first case : suppose $\gamma = \gamma_n$.

It follows from lemma 4.2.2.

second case : γ is an arbitrary arc.

We consider $h \in MCG(D, X)$ such that $h(\gamma) = \gamma_n$, such an homeomorphism exists according to lemma 4.2.5. Let $\delta \in B_n$ be a braid that induces h . Then the homeomorphism $h \circ f \circ h^{-1}$ is induced by the braid $\delta^{-1}\beta\delta$ and satisfies the hypothesis of the first case. It follows then that $\beta = \delta\alpha\delta^{-1} \text{ mod } Z_n$ with $\alpha \in J(B_{n-1})$. \square

Lemma 4.2.6 can be extended to the following

Corollary 4.2.7 *If there exists $f \in [f_\beta]$ and an arc γ from x_i to ∂D such that $f(\gamma)$ is isotopic (rel X) to γ then there exists $\delta \in B_n$ and $\alpha \in J(B_{n-1})$ such that $\beta = \delta\alpha\delta^{-1} \text{ mod } Z_n$. If moreover γ is isotopic to γ_n then one can take δ to be the trivial braid.*

If $f(\gamma)$ is isotopic to γ , it follows from [Ep] that there exists an ambient isotopy of D_n transforming $f(\gamma)$ to γ . If one postcomposes f with this ambient isotopy, one obtains as a result an element of $[f_\beta]$ fixing the arc γ . It suffices then to apply lemma 4.2.6. \square

Lemma 4.2.8 *Let c_1 be an arc in D from x_i to ∂D (with $i \neq n$) whose support is disjoint from the support of γ_n . Then there exists a braid $\alpha\sigma_{n-1}$, where $\alpha \in J(B_{n-1})$ such that an homeomorphism g of D_n induced by the braid $\alpha\sigma_{n-1}$ maps c_1 to γ_n .*

Proof : According to lemma 4.2.5, there exists an orientation preserving homeomorphism h of D_n such that $h(\gamma_n) = \gamma_n$ and $h(c_1) = \gamma_{n-1}$. The homeomorphism h is induced by a braid $\alpha \in J(B_{n-1})$ because of lemma 4.2.2. Let g_1 be a representative of $[f_{\sigma_{n-1}}]$ that satisfies $g_1(\gamma_{n-1}) = \gamma_n$. The map $g = g_1 \circ h$ maps c_1 to γ_n , it is induced by the braid $\alpha\sigma_{n-1}$. \square

4.3 A topological criterion for destabilization

Theorem 4.0.1 *Let $\beta \in B_n$, let $[f_\beta]$ be the mapping class induced by β on D_n . The following conditions are equivalent*

- i) *There exists $f \in [f_\beta]$, $i \in \{1, \dots, n\}$ such that $f(x_i) \neq x_i$ and an arc γ from x_i to ∂D such that*

$$f(\gamma) \cap \gamma = \emptyset.$$

- ii) *The braid β admits a destabilization mod Z_n .*

Note : The fact that a braid admits (or not) a destabilization mod Z_n does not change if one conjugates the braid. It is clear that condition i) is also invariant under conjugation.

Proof :

i) \Rightarrow ii) Let h be an orientation preserving homeomorphism of D_n such that $h(\gamma) = \gamma_n$ and $h(f(\gamma)) = \gamma_{n-1}$, such an homeomorphism exists according to lemma 4.2.5. Let $\delta \in B_n$ be a braid that induces h . We have

$$h \circ f \circ h^{-1}(\gamma_n) = \gamma_{n-1}.$$

By lemma 4.2.4 there exists $g \in [f_{\sigma_{n-1}}]$ such that $g(\gamma_{n-1}) = \gamma_n$. It comes :

$$g \circ h \circ f \circ h^{-1}(\gamma_n) = \gamma_n$$

The homeomorphism $g \circ h \circ f \circ h^{-1}$ is induced by the braid $\delta^{-1}\beta\delta\sigma_{n-1}$. It follows from lemma 4.2.6 that there exists $\alpha \in J(B_{n-1})$ and $k \in \mathbb{N}$ such that

$$\delta^{-1}\beta\delta\sigma_{n-1} = \alpha\Delta_n^k$$

$$\beta = \delta\alpha\bar{\sigma}_{n-1}\delta^{-1}\Delta_n^k$$

This means that β admits a destabilization mod Z_n .

ii) \Rightarrow i)

first case : $\beta = \alpha\bar{\sigma}_{n-1}$.

Lemmas 4.2.2 and 4.2.4 imply that there exists a representative $g_1 \in [f_\alpha]$ such that $g_1(\gamma_n) = \gamma_n$ and a representative $g_2 \in [f_{\bar{\sigma}_{n-1}}]$ such that $g_2(\gamma_n) \cap \gamma_n = \emptyset$.

Then $g_2 \circ g_1 \in [f_\beta]$ and $g_2 \circ g_1(\gamma_n) \cap \gamma_n = \emptyset$.

second case : $\beta = \delta\alpha\bar{\sigma}_{n-1}\delta^{-1}\Delta_n^k$

Let $\beta_1 = \alpha\bar{\sigma}_{n-1}$, it follows from the first case that there exists $g \in [f_{\beta_1}]$ such that $g(\gamma_n) \cap \gamma_n = \emptyset$. Let h be an homeomorphism induced by δ . Then $h^{-1} \circ g \circ h \in [f_\beta]$, and satisfies :

$$h^{-1} \circ g \circ h(h^{-1}(\gamma_n)) \cap h^{-1}(\gamma_n) = \emptyset.$$

It suffices to take the arc $\gamma = h^{-1}(\gamma_n)$. \square

Note : When β admits a destabilization mod Z_n , it means that $\beta = \delta\alpha\sigma_{n-1}\delta^{-1}\Delta_n^k$ for some $\alpha \in J(B_{n-1})$. This can be written $\beta = \delta\alpha\delta^{-1}\delta\sigma_{n-1}\delta^{-1}\Delta_n^k$. Hence the mapping class induced by β is the composition of $[f_{\delta\alpha\delta^{-1}}]$ which is reducible along a curve $f_\delta(C')$ bounding a $n-1$ -punctured disk (cf corollary 4.2.3), and a half Dehn twist $[f_{\delta\sigma_{n-1}\delta^{-1}}]$ along the curve $f_\delta(C_{n-1})$. Another interpretation of the destabilization is that if a braid admits a destabilization mod Z_n , one can find a simple closed curve C bounding a twice punctured disk such that $hdt(C) \circ f_\beta$ is reducible in the specific fashion described above. When there is an arc γ such that $\gamma \cap f(\gamma) = \emptyset$, one can construct such a curve C from $\gamma \cup f(\gamma)$ as shown on figure 4.6. Indeed one can check that $hdt(C)(f(\gamma))$ is homotopic to γ .

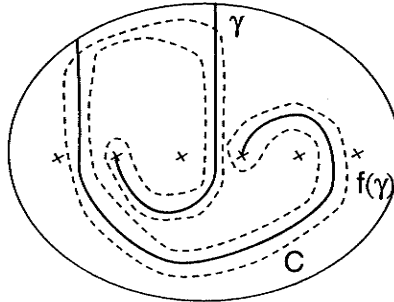


Figure 4.6: Find the twist curve.

Destabilization and Nielsen-Thurston theorem.

Let us assume first that the permutation induced by the braid β on the punctures is transitive and the mapping class $[f_\beta]$ is reducible. We consider a maximal collection of reduction curves \mathcal{C} , let E be the *outer component* of $D_n - \mathcal{C}$, that is the connected component containing ∂D . The surface E is a disk with m small disks removed (m divides n because the permutation is transitive), it can be considered as a punctured disk. Let $f \in [f_\beta]$ be such that $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, then $f(E) = E$. The homeomorphism $f|_E$ is induced by a braid β_{ext} . The braid β_{ext} is called the *outer braid* of β . Note that the basepoints of the braid β_{ext} are not necessarily ordered along an axis ; but any arbitrary choice of an axis allows to consider β_{ext} as a m -string braid ; different choices of axes will give conjugated braids.

Lemma 4.3.2

If the permutation induced by β is transitive and $[f_\beta]$ is reducible, then β admits a destabilization mod Z_n iff the outer braid β_{ext} admits a destabilization mod Z_m .

Proof :

\Rightarrow We assume that β admits a destabilization mod Z_n . Let $f \in [f_\beta]$ be such that $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. There exists an arc γ from ∂D to some x_i such that $f(\gamma) \cap \gamma = \emptyset$. If one considers the arc γ' that is the arc γ truncated at its first intersection with \mathcal{C} , the arc γ' is included in E and satisfies $f|_E(\gamma') \cap \gamma' = \emptyset$. This shows that β_{ext} satisfies the criterion of theorem 4.0.1.

\Leftarrow If β_{ext} admits a destabilization mod Z_m , there exists an arc γ' in E from ∂D to some component C of \mathcal{C} such that $f|_E(\gamma') \cap \gamma' = \emptyset$. One considers an arc γ in D_n constructed as follows : γ is the arc γ' followed by an arc γ_1 from C to a puncture in the disk bounded by C , whose support is included in the disk bounded by C . The arc $f(\gamma_1)$ is inside the disk bounded by $f(C)$, hence it is disjoint from γ_1 because $f(C) \neq C$. It is clear that $f(\gamma) \cap \gamma = \emptyset$. Hence β admits a destabilization mod Z_n . \square

We assume now that the closure of the braid β is a knot, this means that the permutation induced by β on the punctures is transitive. When $[f_\beta]$ is a finite order mapping class, then β is conjugated to $(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})^k$ mod Z_n where $k \in \{1 \dots n-1\}$ is prime with n . In this case it is easy to see that β admits a destabilization mod Z_n . When $[f_\beta]$ is reducible, the above lemma reduces to the study of the outer braid β_{ext} . Therefore the question to decide destabilization mod Z_n for braids with transitive permutation reduces to the question of destabilization for pseudo-Anosov braids with transitive permutation. According to theorem 4.0.1, if one wants to solve explicitly this question, one has to find an arc γ such that $f_\beta(\gamma) \cap \gamma = \emptyset$. It is a difficult question to produce an algorithm that either finds such an arc γ or leads to the conclusion that no such arc exists.

Extension : destabilization on punctured surfaces.

Let S be a surface of genus g with $n \geq 2$ distinguished points and one boundary component. If $\phi \in MCG(S)$, we say that ϕ *admits a destabilization* if there exist two punctures x_i and x_j , with $\phi(x_i) = x_j$, an arc γ from x_i to ∂S and a curve C bounding a twice punctured disk that intersects γ in one point such that $hdt(C) \circ \phi$ leaves γ invariant.

One can prove, using similar techniques, that ϕ admits a destabilization iff there exists an arc γ from some puncture x_i to the boundary such that $\phi(\gamma)$ is disjoint from γ . The arguments are straightforward adaptations of the above ones.

4.4 A topological criterion for exchange

When proving the criterion for destabilization, we had to find a curve along which we performed a half Dehn twist. The exchange move involves two distinguished half Dehn twists, as we shall see.

Theorem 4.0.1 *Let $\beta \in B_n$, let $[f_\beta]$ be the mapping class induced by β on D_n . The following conditions are equivalent*

- i) *There exists $f \in [f_\beta]$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ (with $i \neq j$) and two arcs γ_1, γ_2 from x_i (resp. x_j) to ∂D such that*

$$\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset,$$

$$f(\gamma_1) \cap \gamma_2 = \emptyset.$$

- ii) *The braid β admits an exchange move mod Z_n .*

Proof :

i) \Rightarrow ii)

first case : $\gamma_2 = \gamma_n$.

Let g be induced by a braid $\alpha\sigma_{n-1}$, with $\alpha \in J(B_{n-1})$ such that $g(\gamma_1) = \gamma_n$, cf lemma 4.2.8. The map $f \circ g^{-1}$ maps γ_n to $f(\gamma_1)$ which is an arc disjoint from γ_n . It is induced by the braid $\bar{\sigma}_{n-1}\bar{\alpha}\beta$.

Following lemma 4.2.8, one considers a braid $\alpha'\sigma_{n-1}$, with $\alpha' \in J(B_{n-1})$ such that some homeomorphism g' induced by $\alpha'\sigma_{n-1}$ maps $f(\gamma_1)$ to γ_n . Then $g' \circ f \circ g^{-1}$ maps γ_n to itself, hence is induced by a braid $\alpha'' \in J(B_{n-1})$ because of lemma 4.2.2.

One obtains

$$\bar{\sigma}_{n-1}\bar{\alpha}\beta\alpha'\sigma_{n-1} = \alpha''\Delta_n^k,$$

that is

$$\beta = \alpha\sigma_{n-1}\alpha''\bar{\sigma}_{n-1}\bar{\alpha}'\Delta_n^k.$$

Hence β admits an exchange move mod Z_n .

second case : γ_2 is any arc.

One considers an orientation preserving homeomorphism h that maps γ_2 to γ_n , and go on with the same conjugation arguments as in the previous section.

ii) \Rightarrow i) We assume first that $\beta = \alpha_1\sigma_{n-1}\alpha_2\bar{\sigma}_{n-1}$ with $\alpha_1, \alpha_2 \in J(B_{n-1})$. We construct a representative $f \in [f_\beta]$ by composing the following maps :

a map $f_1 \in [f_{\alpha_1}]$ that leaves γ_n invariant, cf lemma 4.2.2,

a map $g_1 \in [f_{\sigma_{n-1}}]$ that maps γ_{n-1} to γ_n , cf lemma 4.2.4,

a map $f_2 \in [f_{\alpha_2}]$ that leaves γ_n invariant, cf lemma 4.2.2,

a map $g_2 \in [f_{\bar{\sigma}_{n-1}}]$ that maps γ_n to γ_{n-1} , cf lemma 4.2.4.

Let $\gamma_1 = f_1^{-1}(\gamma_{n-1})$ and $\gamma_2 = \gamma_n$. Then $f(\gamma_1) = \gamma_{n-1}$ is disjoint from γ_2 .

In the case $\beta = \delta\alpha_1\sigma_{n-1}\alpha_2\bar{\sigma}_{n-1}\delta^{-1}$, one considers an homeomorphism h induced by δ , and proceed as in the previous section. \square

Bibliographie

- [ABLM] L.Alseda S.Baldwin J.Llibre M.Misiurewicz *Entropy of transitive tree maps* Topology **36**, no.2 (1997), 519-532.
- [Ak] A.Akimenkov *Solution of the reducibility problem for 4-strings braids*, Int. J. of Algebra and Computation **1** no.2 (1991), 185-200.
- [AKM] R.Adler, A.Konheim, M.McAndrew *Topological entropy* Trans. Amer. Math. Soc. **114** (1965), 309-319
- [Al] J.Alexander *A lemma on systems of knotted curves* Proc.Nat. Acad. Sci. USA, **9** (1923), 93-95.
- [Ar] E.Artin *Theorie der Zöpfe*, Hamburg Abh. **4** (1925), 47-72.
- [Ba] M.Bauer *Examples of pseudo-Anosov Homeomorphisms* Trans. Amer. Math. Soc. **330** (1992), 333-359.
- [BF] R.Bowen and J.Franks *The periodic points of maps of the disc and the interval* Topology **15** (1976), 337-342.
- [BGMY] L.Block G.Guckenheimer M.Misiurewicz L.Young *Periodic points and topological entropy of one dimensional maps* Global theory of dynamical systems Springer L.N. **819** (1980), 18-34
- [BH1] M.Bestvina, M.Handel *Train-tracks for surface homeomorphisms* Topology **34**, no.1 (1995), 109-140
- [BH2] M.Bestvina, M.Handel *Train tracks and automorphisms of free groups*, Ann.of Math. **135** (1992), 1-51.
- [Bi] J.Birman *Braids, links and mapping class groups*, Ann. Math. Stud. **82** (1974), Princeton Univ. Press.
- [BM] J.Birman, W.Menasco *Studying links via closed braids. V : the unlink*, Trans. Amer. Math. Soc. **329** no. 2 (1992), 585-606.
- [Bow] R.Bowen *Entropy and the fundamental group* The structure of attractors in dynamical systems Springer L.N. **668** (1978)
- [Di] W.Dicks *Groups, trees and projective modules* Springer Lecture Notes **790** (1980).

- [Ep] D.Epstein *Curves on 2-manifolds and isotopies*, Acta. Math. **115** (1966), 83-107.
- [Fi] T.Fiedler *A small state sum for knots*, Topology **32** no.2 (1993), 281-294.
- [FLP] A.Fathi, F.Laudenbach, V.Poénaru *Travaux de Thurston sur les surfaces* Astérisque **66-67**
- [FM] J.Franks, M.Misiurewicz *Cycles for disk homeomorphisms and Thick Trees* Contemporary Mathematics **152** (1993), 69-139
- [Ga] F.Garside *The braid group and other groups*, Quarterly Journal Math. Oxford **20** (1969), 235-254.
- [GST] J.M.Gambaudo, S. Van Strien, C.Tresser *The periodic orbit structure of orientation preserving embeddings of the disk with topological entropy zero* Ann. Inst. H.Poincaré Phys.Théo, **49**, 3 (1989), 335-356.
- [He] G.Hemion *On the classification of homeomorphisms of 2-manifolds and the classification of 3-manifolds* Acta Math. **1-2** (1979), 125-155.
- [Ke] U.Keil *Thèse*, Université de Toulouse
- [Ker] S.Kerchoff *The Nielsen realisation problem* Annals of Math. **117**, 235-265.
- [LM] J.Llibre, R. MacKay *A classification of braid types for diffeomorphisms of surfaces of genus zero with topological entropy* Journal London Math.Soc. **42** (1990), 562-576.
- [Lo1] J.Los *Pseudo-Anosov maps and invariant train tracks in the disc : a finite algorithm* Proc.London Math.Soc. **66** (1993), 400-430
- [Lo2] J.Los *On the conjugacy problem for automorphisms of free groups*, Topology **35** no.3 (1996), 779-806.
- [Lo3] J.Los *On the forcing relation for surface homeomorphisms*, Pub. Mat. IHES. **85** (1997), 5-61.
- [Lo4] J.Los *Topological entropy and periodic orbits for homeomorphisms of the disc : a lower bound* Preprint INLN # 91.58. (octobre 1991)
- [Ma] A.Markov *Über die freie Äquivalenz der geschlossenen Zöpfe*, Rec. Soc. Math. Moscou **43** (1936), 73-78.
- [Mat] Matsuoka *Braids of Periodic Points and a Two Dimensionnal Analogue of Sarkovskii's Ordering* Dynamical Systems and Nonlinear oscillations (1985)
- [Mo] L.Mosher *The classification of pseudo-Anosovs*, London Math. Soc. Lect. Notes **112** (1986), 13-75.
- [Ni] J.Nielsen *Collected papers* Birkhauser (1986).

- [Pe1] R.Penner with J.Harer *Combinatorics of train tracks* Annals of Math. Studies **125** (1992).
- [Pe2] R.Penner *Bounds on least dilatations* Proc.Amer.Math.Soc **113**, number 2 (1991), 443-450.
- [Sta] J.Stallings *Topology of finite graphs* Invent. Math. **71** (1983), 551-565.
- [St] V.Styšnev *The extraction of a root in a braid group* Math. USSR Izvestija **13**, No2 (1979), 405-416
- [Th] W.Thurston *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces* Bull. of the A.M.S. **19** (1988), 415-431